



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ™

Απαντήσεις Άλγεβρας

Τράπεζα θεμάτων

Α΄Λυκείου

1 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0 \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -5$ και $\gamma = 6$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 2)$$

Η ρίζα $x = 2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 3$.

2 ΘΕΜΑ 2

α) i) Ισχύει ότι:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$$

$$\text{Άρα } |3x - 6| = 3x - 6$$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$$

ii) Ισχύει ότι:

$$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$$

$$\text{Άρα } |3x - 6| = -(3x - 6) = 6 - 3x$$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x$$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x - 6| = 3x - 6$. Τότε:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 6 + 2} = \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x - 4} = 3x + 4$$

**3** ΘΕΜΑ 2

α) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (2 - 1)\omega = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -\omega \quad (1)$$

και

$$\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4 - 1)\omega = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -2$$

β) Ο n -οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = -2 + (n - 1) \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = -2 + 2n - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = 2n - 4$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_n = 98 \Leftrightarrow 2n - 4 = 98 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n = 102 \Leftrightarrow n = 51$$

Άρα ο 51^{ος} όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

4 ΘΕΜΑ 2

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 6)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B(-1, 4)$ αν και μόνο αν:

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha + \beta = 4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha + 6 - \alpha = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha = 1$ στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, ο τύπος της f γράφεται $f(x) = x + 5$.

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-5, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 + 5 = 5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 5)$.

5 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί x , $2x + 1$, $5x + 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2x + 1)^2 = x \cdot (5x + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$$

β) i) Για $x = 1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$1, 3, 9$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii) Για $x = -1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$-1, -1, -1$$

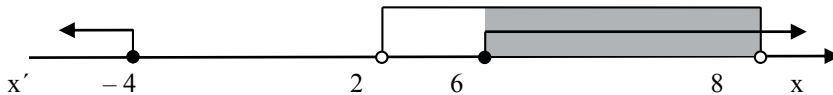
Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

**6** ΘΕΜΑ 2**α)** Είναι:

$$\begin{aligned}|x - 1| &\geq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 1 \leq -5 \text{ ή } x - 1 &\geq 5) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \leq -4 \text{ ή } x \geq 6) &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}d(x, 5) &< 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x - 5| &< 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < x - 5 &< 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 + 5 < x - 5 + 5 &< 3 + 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 < x < 8 &\Leftrightarrow x \in (2, 8)\end{aligned}$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:

Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$6 \leq x < 8 \Leftrightarrow x \in [6, 8)$$

7 ΘΕΜΑ 2**α)** Είναι:

$$\begin{aligned}f(-1) &= 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \text{ και} \\ f(3) &= 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

Άρα $f(-1) = f(3)$.**β)** • Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

• Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

8 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= \frac{x+2+3x+2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= 2x + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)\end{aligned}$$

β) i) Για $x = 1$ οι αριθμοί γράφονται 3, 4, 5 και η διαφορά είναι $\omega = 1$.

ii) Για $x = -1$ οι αριθμοί γράφονται 1, 0, -1 και η διαφορά είναι $\omega = -1$.

9 ΘΕΜΑ 2

α) • Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ αδύνατη}$$

• Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται:

$$((-1)^2 - 1)x = (-1 + 1)(-1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 1 &\neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) &\neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1 \neq 0 \text{ και } \lambda + 1 &\neq 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda \neq 1 \text{ και } \lambda &\neq -1)\end{aligned}$$

10 ΘΕΜΑ 2

α) Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\begin{aligned}\alpha_v &= \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_v &= 120 + (v - 1)20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_v &= 120 + 20v - 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_v &= 100 + 20v\end{aligned}$$

β) Η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 \text{ καθίσματα}$$

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2.100 \text{ καθίσματα}$$

11 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ βρίσκουμε:

$$1 \cdot 2 < xy < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$$

12 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (10 - 1)\omega - [\alpha_1 + (6 - 1)\omega] = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20 - 1)\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$$

γ) Ισχύει ότι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(19 + 133) = 10 \cdot 152 = 1.520$$

13 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$$

β) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση Κ πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 2 &\neq 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x + 1 \neq 0 \text{ και } x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x \neq -\frac{1}{2} \text{ και } x \neq 2\right) \end{aligned}$$

γ) Για $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$ ισχύει ότι:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

14 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma = \delta - \gamma \Leftrightarrow \delta = 5\gamma$$

β) Για $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma} = \frac{3\beta\gamma + \beta\gamma}{\beta 5\gamma - \beta\gamma} = \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1$$

15 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $\Pi = 2x + 2y$. Είναι:

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 < 2x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6 \quad (1)$$

$$2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 < 2y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 2y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2 + 4 < 2x + 2y < 6 + 8 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$$

**16** ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 |x - 5| < 4 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -4 < x - 5 < 4 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -4 + 5 < x - 5 + 5 < 4 + 5 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 < x < 9 &\Leftrightarrow x \in (1, 9)
 \end{aligned}$$

β) Αφού τυχαίος αριθμός α επαληθεύει την ανίσωση του ερωτήματος (α) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 \alpha \in (1, 9) &\Leftrightarrow 1 < \alpha < 9 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\
 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{9} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1
 \end{aligned}$$

17 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\frac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow 4x + 5y = -2(x - 4y) \Leftrightarrow 4x + 5y = -2x + 8y \Leftrightarrow 6x = 3y \Leftrightarrow y = 2x$$

β) Για $y = 2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy} = \frac{2x^2 + 3(2x)^2 + x \cdot 2x}{x \cdot 2x} = \frac{2x^2 + 3 \cdot 4x^2 + 2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8$$

18 ΘΕΜΑ 2α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Πρέπει:

$$x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -2 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Είναι:

$$f(2) = \frac{2+2}{2^2-2-6} = \frac{4}{4-2-6} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ και}$$

$$f(4) = \frac{4+2}{4^2-4-6} = \frac{6}{16-4-6} = \frac{6}{6} = 1$$

Άρα:

$$f(2) + f(4) = -1 + 1 = 0$$

19 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί A, B, Γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$B = \frac{A+\Gamma}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1+x+8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 4) = 9 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

β) i) Για $x = 1$ είναι $A = 1$, $B = 5$ και $\Gamma = 9$. Τότε:

$$\omega = B - A = 5 - 1 = 4$$

ii) Είναι:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{20} = 1 + 76 \Leftrightarrow a_{20} = 77$$

20 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{4-x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = (4 - x) \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)$$



Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

Από τα σκέλη (α) και (β) βρίσκουμε $x = 2$.

21 ΘΕΜΑ 2

α) Ισχύει ότι:

$$5 < x < 10 \Leftrightarrow (5 < x \text{ και } x < 10) \Leftrightarrow (0 < x - 5 \text{ και } x - 10 < 0)$$

Τότε:

$$|x - 5| = x - 5 \text{ και } |x - 10| = -(x - 10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

22 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 \neq 0 \text{ και } x + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ και } x \neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

β) Το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$f(\alpha) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3 = 0 \text{ ή } \alpha + 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -3)$$

23 ΘΕΜΑ 2

α) Ισχύει ότι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Τότε:

$$|x - 1| = x - 1 \text{ και } |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

Άρα:

$$A = |x - 1| - |x - 2| = x - 1 - (2 - x) = x - 1 - 2 + x = 2x - 3$$

β) Για $x < 1$ είναι:

$$|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x \text{ και } |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

Επομένως:

$$A = |x - 1| - |x - 2| = 1 - x - (2 - x) = 1 - x - 2 + x = -1, \text{ σταθερή}$$

24 ΘΕΜΑ 2

α) Η περίμετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\begin{aligned} \Pi &= AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A = \\ &= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 2x < 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$$

$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 < 4y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

25 ΘΕΜΑ 2

α) i) Είναι:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = = \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} + \frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{10}{5^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{10}{25-5} = \\ &= \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2} = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = \frac{1}{2} \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{20}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

26 ΘΕΜΑ 2

α) Για να βρούμε την απόσταση του αυτοκινήτου μετά από 25 λεπτά θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 25$ και βρίσκουμε:

$$y = 35 + 0,8 \cdot 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 35 + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 55 \text{ χιλιόμετρα}$$

β) Για να βρούμε τα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα απ την πόλη Α θέτουμε στη δοθείσα σχέση $y = 75$ και βρίσκουμε:

$$75 = 35 + 0,8x \Leftrightarrow 40 = 0,8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ λεπτά}$$

27 ΘΕΜΑ 2

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{2} \quad (2)$$

Αφού η μία ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός 1, από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

$$1 \cdot x_2 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$1 + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{5}{2} = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-5}{2} = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3$$

β) Για $\lambda = 3$ το τριώνυμο γράφεται $2x^2 + 3x - 5$

Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$ έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{2}$. Τότε:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)(x - 1) = (2x + 5)(x - 1)$$

28 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\beta)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\beta^2 = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5\beta) \pm \sqrt{9\beta^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5\beta \pm 3\beta}{4} = \begin{cases} \frac{5\beta + 3\beta}{4} = 2\beta \\ \frac{5\beta - 3\beta}{4} = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Σημείωση: Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = 2\beta$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2(2\beta)^2 - 5\beta(2\beta) + 2\beta^2 = 8\beta^2 - 10\beta^2 + 2\beta^2 = 0$$

Ομοίως η $x_2 = \frac{\beta}{2}$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 5\beta\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2\beta^2 = 2\frac{\beta^2}{4} - 5\frac{\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{\beta^2}{2} - \frac{5\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{-4\beta^2}{2} + 2\beta^2 = 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$.



β) Οι αριθμοί 2β , β , $\frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, διότι

$$\frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2} \text{ και } \frac{\frac{\beta}{2}}{\beta} = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2}, \text{ δηλαδή ο λόγος των όρων με τη σειρά που δίνονται είναι σταθερός.}$$

29 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\beta x + \beta^2 - 4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\beta) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2\beta \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2\beta+4}{2} = \beta + 2 \\ \frac{2\beta-4}{2} = \beta - 2 \end{cases}$$

Σημείωση: Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = \beta + 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta + 2)^2 - 2\beta(\beta + 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 + 4\beta + 4 - 2\beta^2 - 4\beta + \beta^2 - 4 = 0$$

Ομοίως η $x_2 = \beta - 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta - 2)^2 - 2\beta(\beta - 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 - 4\beta + 4 - 2\beta^2 + 4\beta + \beta^2 - 4 = 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της x_1 , x_2 με $x_1 \neq x_2$.

β) Οι αριθμοί $\beta - 2$, β , $\beta + 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι

$$\beta - (\beta - 2) = 2 \text{ και } (\beta + 2) - \beta = 2, \text{ δηλαδή διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό } \omega = 2.$$

30 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

$$|y - 6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y - 6 \leq 4 \Leftrightarrow -4 + 6 \leq y - 6 + 6 \leq 4 + 6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y είναι $\Pi = 4x + 2y$.

Από το σκέλος (i) βρίσκουμε:

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 \leq 4x \leq 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20 \quad (1)$$

$$2 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 10 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 20 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4 + 4 \leq 4x + 2y \leq 20 + 20 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 8 και η μέγιστη η 40.

31 ΘΕΜΑ 2

α) Για $\alpha = 2$, $\beta = 5$ και $\gamma = -1$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Με τη βοήθεια των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$\bullet x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$$

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} S = 5 \text{ και}$$

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} P = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P = -2$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x - 2 = 0$$

32 ΘΕΜΑ 2

α)

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}$$

Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \text{και} \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \text{και} \\ x \neq 3 \end{cases}$$



β) Ισχύει: $-2 < x < 3$, οπότε $x + 2 > 0$ και $x - 3 < 0$.

Άρα $|x + 2| = x + 2$ και $|x - 3| = -(x - 3)$.

$$\text{Οπότε: } K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1 + 1 = 2$$

33 ΘΕΜΑ 2

α) • Το τριώνυμο $-x^2 + 5x - 6$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-2} = 2 \\ \frac{-5-1}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-x^2+5x-6$	-	○	+	○	-

Επομένως ισχύει:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

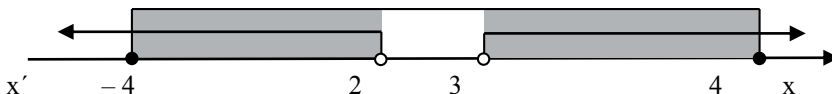
• Την ανίσωση $x^2 - 16 \leq 0$ θα τη λύσουμε με συντομότερο τρόπο. Ισχύει ότι:

$$x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπα φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-4 \leq x < 2 \text{ ή } 3 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$$

34 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$d(x, -2) < 1 \Leftrightarrow |x - (-2)| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2 < x + 2 - 2 < 1 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < x < -1$$

β) Από το σκέλος (α) ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x + 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 2|^2 < 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0$$

35 ΘΕΜΑ 2α) Το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{3} - 1$, $\gamma = \sqrt{3}$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 + 4\sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 > 0$$

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{-2} = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{-2} = -1 \\ \frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}{-2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} = -(x - (-1))(x - \sqrt{3}) = -(x + 1)(x - \sqrt{3})$$

**36**

ΘΕΜΑ 2

- i) Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 + 2x - 3 = 1 \cdot (x - 1)(x - (-3)) = (x - 1)(x + 3)$$

- ii) Πρέπει:

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = x + 3$$

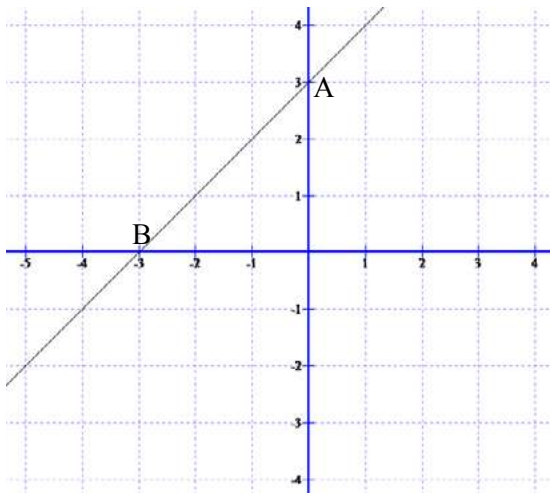
Αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου $x = 0$ και βρίσκουμε: $f(0) = 0 + 3 = 3$.

Άρα ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η C_f είναι το $A(0, 3)$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου $y = 0$ και βρίσκουμε: $0 = x + 3 \Leftrightarrow x = -3$.

Άρα ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η C_f είναι το $B(-3, 0)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι η:



37 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 21$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = 21$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{10+4}{2} = 7 \\ \frac{10-4}{2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$	
$x^2 - 10x + 21$	+	○	-	○	+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 10x + 21 < 0 \Leftrightarrow 3 < x < 7 \Leftrightarrow x \in (3, 7)$$

β) i) Για $3 < x < 7$ είναι $x - 3 > 0$, οπότε:

$$|x - 3| = x - 3$$

και από το σκέλος (α) ισχύει $x^2 - 10x + 21 < 0$, οπότε:

$$|x^2 - 10x + 21| = -(x^2 - 10x + 21) = -x^2 + 10x - 21$$

Τότε η παράσταση Α γράφεται:

$$A = x - 3 - x^2 + 10x - 21 = -x^2 + 11x - 24$$

ii) Είναι:

$$A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{11+1}{2} = 6 \\ \frac{11-1}{2} = 5 \end{cases}$$

Οι ρίζες $x = 5$, $x = 6$ είναι και οι δύο δεκτές διότι ανήκουν στο διάστημα $(3, 7)$.

**38**

ΘΕΜΑ 2

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 30$ και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$T = 15 + 25 \cdot 30$$

$$T = 15 + 750$$

$$T = 765^{\circ}\text{C}$$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C θέτουμε στη δοθείσα σχέση $T = 290$ και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x$$

$$275 = 25x$$

$$x = 11 \text{ χιλιόμετρα}$$

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \Leftrightarrow$$

$$15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow$$

$$x > 17 \text{ χιλιόμετρα}$$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440°C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

39

ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$



Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$3x^2 - 4x + 1$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Επομένως ισχύει:

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

β) Αφού οι αριθμοί α , β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης ισχύει ότι:

$$\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1 \text{ και}$$

$$\beta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$$

Τότε:

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3\alpha \leq 3 \quad (1) \text{ και}$$

$$\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 6\beta \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 + 2 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq \frac{9}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq 1$$

Άρα και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης.

40 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = -30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \cdot 2 = -30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = -15$$



β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 2 \text{ και } P = \alpha\beta = -15$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{2+8}{2} = 5 \\ \frac{2-8}{2} = -3 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 5 \text{ και } \beta = -3) \text{ ή } (\alpha = -3 \text{ και } \beta = 5)$$

41 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} A + B + \Gamma &= (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 = \\ &= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23 \end{aligned}$$

β) Είναι: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9}$. Τότε:

$$6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$$

42 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (4 - 1)\omega - [\alpha_1 + (2 - 1)\omega] = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$$

β) Ισχύει ότι:



$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_1 + (2-1)5 + \alpha_1 + (3-1)5 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 + 5 + 10 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

43 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13 \text{ και}$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) • Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

• Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

44 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|x + 4| \geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x + 4 \leq -3 \text{ ή } x + 4 \geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x \leq -7 \text{ ή } x \geq -1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 4 \geq -1 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 4 \geq 3, \text{ δηλαδή } \alpha + 4 > 0$$

Άρα, $|\alpha + 4| = \alpha + 4$. Τότε η παράσταση Α γράφεται:

$$A = ||\alpha + 4| - 3| = |\alpha + 4 - 3| = |\alpha + 1| = \alpha + 1, \text{ αφού } \alpha \geq -1$$

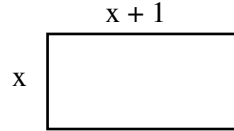
**45** ΘΕΜΑ 2

α) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2(x + 1) + 2x = 4x + 2, \text{ με } x > 0$$

και το εμβαδόν του Ε είναι:

$$E = x(x + 1) = x^2 + x, \text{ με } x > 0$$



β) Ισχύει ότι:

$$E = 90 \text{ αν και μόνο αν}$$

$$x^2 + x = 90 \text{ αν και μόνο αν}$$

$$x^2 + x - 90 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10, \text{ απορρίπτεται } (x > 0) \end{cases}$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι:

$$x = 9 \text{ μέτρα και}$$

$$x + 1 = 10 \text{ μέτρα.}$$

46 ΘΕΜΑ 2

α) Έχουμε:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow$$

$$K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 + \alpha^2) + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β) Ισχύει

$$K = \Lambda \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 0 \text{ και } \alpha = \beta$$

Τελικά $K = \Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

47 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 - \kappa x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\kappa$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-\kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \kappa^2 + 8 > 0, \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}$$

β)

i) Είναι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\kappa}{1} = \kappa \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$$

ii) Το άθροισμα των ριζών ρ_1, ρ_2 είναι:

$$\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\kappa$$

και το γινόμενο:

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4 \cdot (-2) = -8$$

Επομένως η εξίσωση που έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 είναι:

$$x^2 - 2\kappa x - 8 = 0$$

48 ΘΕΜΑ 2

α) Αφού η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$$1^2 - (\lambda - 1)1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$



β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 6$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

49 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

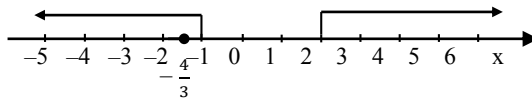
β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

γ)



Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

50 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (3 - 1)\omega = 9 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow$$

$$2\omega = 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\omega = 4$$

β) Ισχύει:

$$\alpha_v > 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (v - 1)\omega > 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + (v - 1)4 > 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + 4v - 4 > 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$4v > 33 \quad \Leftrightarrow$$

$$v > \frac{33}{4}$$

Επομένως, ο μικρότερος θετικός ακέραιος v ώστε $\alpha_v > 30$ είναι ο $v = 9$.

51 ΘΕΜΑ 2

α) Ισχύει ότι:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \quad (1)$$

και

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 3 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

β) Ο τύπος της f γράφεται: $f(x) = -2x + 5$.

Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

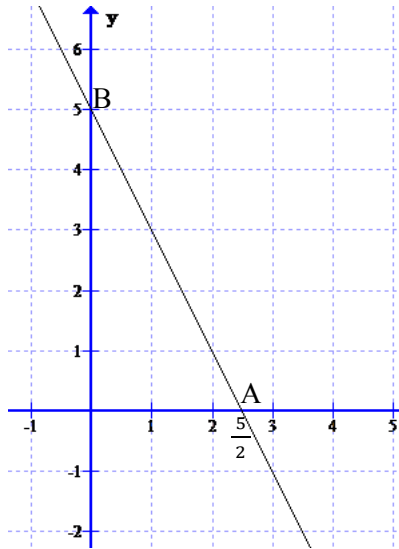
Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 + 5 = 5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 5)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A, B . Επομένως το γράφημα της είναι:

**52** ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ο τύπος της f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x(x + 4) = x^2 + 4x$$

β) Είναι:

$$f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 32$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = -32$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{-4+12}{2} = 4 \\ \frac{-4-12}{2} = -8 \end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A = \mathbb{R} - \{4\}$ δεκτή είναι μόνο η τιμή $x = -8$.

**53** ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\bullet f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\bullet f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$\bullet f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} A &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) = \\ &= \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} = \\ &= \frac{2}{2} + 2 = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+1) = 5x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2+2 &= 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

54 ΘΕΜΑ 2



α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2$$

Τότε:

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30$$

55 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3 =$$

$$= x^2(x - 1) + 3(x - 1) =$$

$$= (x - 1)(x^2 + 3)$$

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \quad \text{και} \quad y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = x(x^2 - x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3 = 0, \text{ αδύνατη}) \Leftrightarrow x = 1$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 3$. Άρα το σημείο τομής των C_f , C_g είναι το $A(1, 3)$.

56 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Επειδή $\alpha = 1 > 0$, ισχύει ότι:

$$x^2 + 4x + 5 > 0,$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Είναι $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} B &= |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B = x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B = 1 \end{aligned}$$

57 ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1) \end{aligned}$$

- Για $x = 0$: $f(0) = 0^3 = 0$
- Για $x = 1$: $f(1) = 1^3 = 1$
- Για $x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 = -1$

Τελικά τα σημεία τομής των C_f , C_g είναι τα:

$$O(0, 0), A(1, 1) \text{ και } B(-1, -1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$x_A = -x_B \text{ και } y_A = -y_B$$

Άρα τα σημεία A , B είναι συμμετρικά ως προς το O .

**58**

ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2|x| \neq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

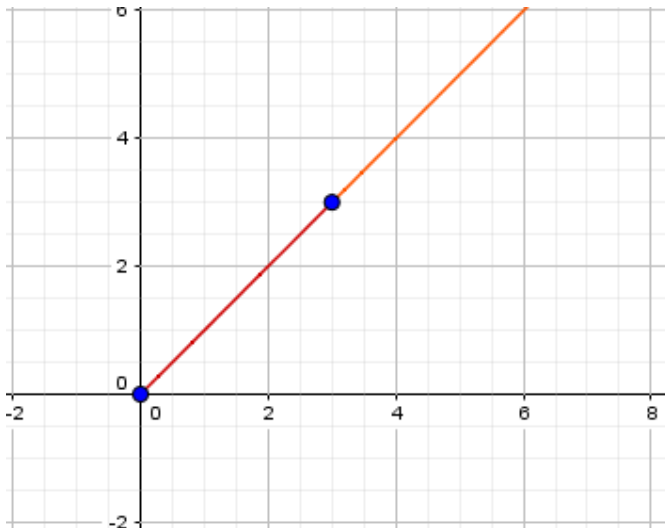
β) Ο τύπος της f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γράφεται:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6} =$$

$$= \frac{2|x|^2 - 6|x|}{2|x| - 6} =$$

$$= \frac{|x|(2|x| - 6)}{2|x| - 6} = |x|, \text{ για κάθε } x \in A$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ για $x > 0$, είναι η:



**59** ΘΕΜΑ 2 _____

α) Είναι:

$$2 \leq x < 3 \Leftrightarrow (2 \leq x \text{ και } x < 3) \Leftrightarrow (4 \leq 2x \text{ και } x - 3 < 0) \Leftrightarrow (0 \leq 2x - 4 \text{ και } x - 3 < 0)$$

Τότε:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4 \text{ και } B = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$$

Άρα:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

αδύνατο διότι $x \in [2, 3)$. Επομένως δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε $A + B = 2$.

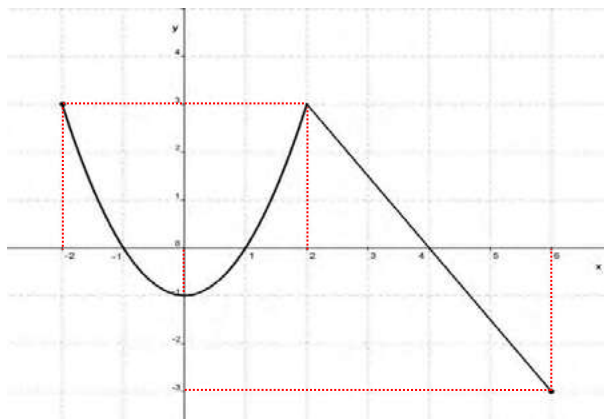
60 ΘΕΜΑ 2 _____



α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το:

$$A = [-2, 6]$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία:

$$A(-1, 0), B(1, 0) \text{ και } \Gamma(4, 0)$$

και τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\Delta(0, -1)$$

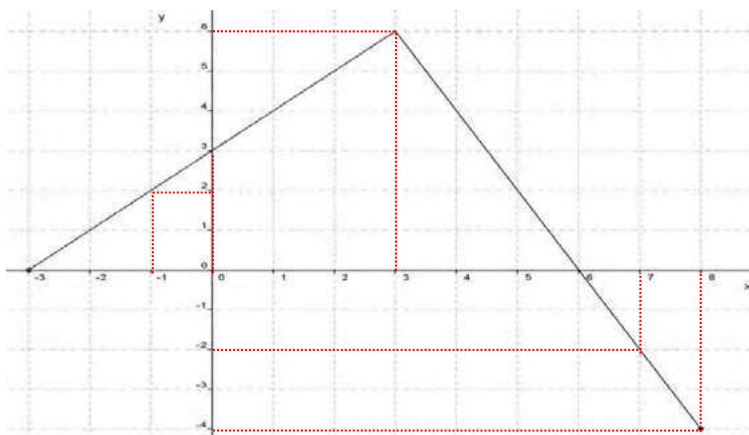
δ) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές, δηλαδή αυτά για τα οποία βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-1, 1)$ και $(4, 6]$.

61 ΘΕΜΑ 2

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το:

$$A = [-3, 8]$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία:

$$A(-3, 0) \text{ και } B(6, 0)$$

και τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\Gamma(0, 3)$$

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή αυτό για το οποίο βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$ είναι το $(-3, 6)$.

**62**

ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $3x^2 + 9x - 12$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = 9$, $\gamma = -12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-9 \pm 15}{6} = \begin{cases} \frac{-9+15}{6} = 1 \\ \frac{-9-15}{6} = -4 \end{cases}$$

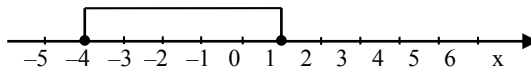
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$3x^2 + 9x - 12$	+	○	○	+

Επομένως ισχύει:

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-4, 1]$$



β) Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης αν και μόνο αν:

$$-4 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2})^3 \leq 1^3 \Leftrightarrow 2 \leq 1, \text{ άτοπο}$$

Άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης

63

ΘΕΜΑ 2

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ αν και μόνο αν:

$$g(1) = -4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + \mu}{1+1} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2} = -4 \Leftrightarrow -2 + \mu = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu = -6$$

β) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$ με:

$$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

γ) Για $\mu = -6$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x+1}$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$.

Το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4} = \begin{cases} \frac{4+8}{4} = 3 \\ \frac{4-8}{4} = -1 \end{cases}$$

Άρα:

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x-3)(x-(-1)) = 2(x-3)(x+1)$$

Τότε, μετά από τις σχετικές πράξεις και απλοποιήσεις ο τύπος της g γράφεται:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x^2 - 4x - 6}{x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(x) = \frac{2(x-3)(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(x) = 2(x-3) = 2x - 6, \text{ με } x \neq -1 \end{aligned}$$

64 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{\sqrt{9}+\sqrt{25}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \end{aligned}$$



$$= \frac{3+5}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} |x + 4| &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x + 4| &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 4 = 1 \text{ ή } x + 4 = -1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = -5) &\end{aligned}$$

65 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} (2\kappa)^2 &= (\kappa - 2) \cdot (7\kappa + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\kappa^2 &= 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ &= (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = \\ &= 100 + 96 = 196 > 0 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{10+14}{6} = 4 \\ \frac{10-14}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -\frac{2}{3} < 0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 4$ οι αριθμοί γράφονται 2, 8, 32 οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β) i) Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda^{2-1} = 4\alpha_1, \quad \alpha_4 = \alpha_1 \lambda^{4-1} = \alpha_1 4^3 = 64\alpha_1, \quad \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^{5-1} = \alpha_1 4^4 = 256\alpha_1$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_5 &= \\ &= 4\alpha_1 + 256\alpha_1 = \end{aligned}$$

$$= 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) =$$

$$= 4(\alpha_1 + \alpha_4)$$

66 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 2(\lambda - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

β) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda - 1)$, $\gamma = -1$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-(\lambda - 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Επειδή είναι $\Delta = (\lambda + 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

67 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και

$$-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \cdot (-2) \geq -2\beta \geq -3 \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \geq -2\beta \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2 + 6 \leq \alpha - 2\beta \leq 4 + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12$$

β) Ισχύει ότι:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \leq \alpha^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow 4 \leq \alpha^2 \leq 16 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$6 \cdot 2 \leq -2\alpha\beta \leq 8 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \leq -2\alpha\beta \leq 32 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$4 + 12 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 16 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 48$$

68**ΘΕΜΑ 2**

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 5 \quad \text{και} \quad P = \alpha\beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

69 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 &= -12 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) &= -12 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 &= -12 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha\beta \cdot (-1)^2 &= -12 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha\beta &= -12
 \end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = -1 \text{ και } P = \alpha\beta = -12$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = -12$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 3 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 3)$$

70 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 K - \Lambda &= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) = \\
 &= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) = \\
 &= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta = \\
 &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)
 \end{aligned}$$



β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} K \geq \Lambda &\Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β .

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} K = \Lambda &\Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \text{ και } (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ και } \alpha = 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = -3) \end{aligned}$$

71

ΘΕΜΑ 2

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} &= \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\alpha^2+1) = \alpha(\beta^2+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha\beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1) = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1 \end{aligned}$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{-2} \cdot \alpha^{25} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{23} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}} \cdot \frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1$$

72 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \leq 0$ και $3 - x \geq 0$. Τότε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \quad \text{και} \quad |3 - x| = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| = -(2x - 3) - 2(3 - x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

73 ΘΕΜΑ 2α) Οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} (2 - x)^2 &= (6 - x) \cdot (x + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 &= 6x + 24 - x^2 - 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

β) i) Για $x = 5$:

$$\alpha_2 = x + 4 = 9, \quad \alpha_3 = 2 - x = -3 \quad \text{και} \quad \alpha_4 = 6 - x = 1$$

Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{1}{3}$.



ii) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 \lambda^{2-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 &= \alpha_1 \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 &= -27\end{aligned}$$

74 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x-2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < x < 5\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}-1 < x < 5 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1 < x \text{ και } x < 5) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (0 < x+1 \text{ και } x-5 < 0)\end{aligned}$$

Άρα:

$$|x+1| = x+1 \text{ και } |x-5| = -(x-5) = 5-x$$

Τότε:

$$K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3} = \frac{x+1+5-x}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

75 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|y-2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < y-2 < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1+2 < y-2+2 < 1+2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < y < 3 &\Leftrightarrow y \in (1, 3)\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}1 < y < 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 < y \text{ και } y < 3) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (0 < y-1 \text{ και } y-3 < 0)\end{aligned}$$

Άρα:

$$|y - 1| = y - 1 \quad \text{και} \quad |y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$$

Τότε:

$$K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2} = \frac{y-1+3-y}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

76 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -x \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq -x \leq -3 \quad (1)$$

και από υπόθεση ισχύει ότι $-2 \leq y \leq -1 \quad (2)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 - 5 \leq y - x \leq -1 - 3 \Leftrightarrow -7 \leq y - x \leq -4$$

β) Ισχύει ότι:

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 3^2 \leq x^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25 \quad (3)$$

και:

$$-2 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-1) \geq y \cdot (-1) \geq -1 \cdot (-1) \Leftrightarrow 2 \geq -y \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq (-y)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq y^2 \leq 4 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$9 + 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25 + 4 \Leftrightarrow 10 \leq x^2 + y^2 \leq 29$$

77 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$a_{25} = a_{12} + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + (25 - 1)\omega = a_1 + (12 - 1)\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\omega = 11\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$a_v = 152 \Leftrightarrow a_1 + (v - 1)\omega = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + (v - 1)3 = 152 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow 2 + 3v - 3 = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v = 153 \Leftrightarrow v = 51$$

Άρα ο 51ος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

78 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} &= \frac{\alpha_1 + (15-1)\omega - [\alpha_1 + (9-1)\omega]}{\alpha_1 + (10-1)\omega - [\alpha_1 + (7-1)\omega]} = \\ &= \frac{\alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} = \\ &= \frac{6\omega}{3\omega} = 2 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{18}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{18}{3\omega} = 2 \Leftrightarrow 18 &= 6\omega \Leftrightarrow \omega = 3 \end{aligned}$$

79 ΘΕΜΑ 2

α) i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(1 + 3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση γράφεται:

$$(-3 + 3)x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha + 3)x &= \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\alpha + 3)x &= (\alpha + 3)(\alpha - 3) \stackrel{\alpha \neq -3}{\Leftrightarrow} \\
 \Leftrightarrow \frac{(\alpha + 3)x}{\alpha + 3} &= \frac{(\alpha + 3)(\alpha - 3)}{\alpha + 3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \alpha - 3
 \end{aligned}$$

80 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha_4 - \alpha_9 &= 15 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4 - 1)\omega - [\alpha_1 + (9 - 1)\omega] &= 15 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - 8\omega &= 15 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -5\omega &= 15 \Leftrightarrow \omega = -3
 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \alpha_v = v &\Leftrightarrow \alpha_1 + (v - 1)\omega = v \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 41 + (v - 1)(-3) &= v \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 41 - 3v + 3 &= v \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 44 &= 4v \Leftrightarrow v = 11
 \end{aligned}$$

81 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha_6 + \alpha_{11} &= 40 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 + (6 - 1)\omega + \alpha_1 + (11 - 1)\omega &= 40 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 5\omega + 10\omega &= 40 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 &\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 &= 40 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\alpha_1 &= -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10
 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 S_v = 0 &\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v - 1)\omega] = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{v}{2}[2(-10) + (v - 1)4] &= 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \frac{v}{2}(-20 + 4v - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 + 4v = 0 \Leftrightarrow 4v = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 6$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 6 όρους ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν.

82 ΘΕΜΑ 2

αi) Είναι:

$$|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow$$

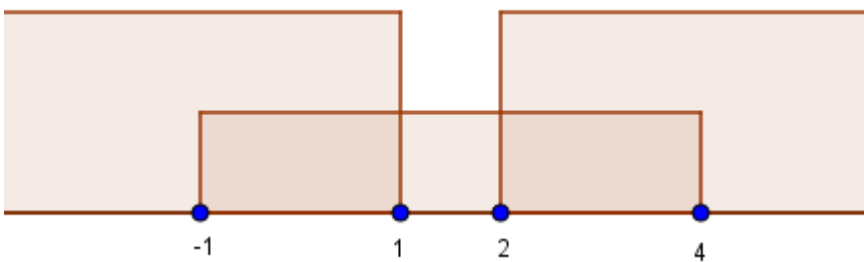
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$$

αii) Είναι:

$$|2x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow (2x - 3 \leq -1 \text{ ή } 2x - 3 \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2)$$

β)



83 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $2x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned}
 |x - 1| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -1 < x < 3
 \end{aligned}$$

γ) Η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι η $x = 2$.

84 ΘΕΜΑ 2

α) Η παράσταση Π ορίζεται για $x \in R$ με:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - x \neq 0 \text{ και } 1 - x \neq 0) &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x(x - 1) \neq 0 \text{ και } x \neq 1) &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x - 1 \neq 0 \text{ και } x \neq 1) &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \text{ και } x \neq 1) &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1)
 \end{aligned}$$

Επομένως η παράσταση Π έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε $x \in R - \{0, 1\}$

β) Για κάθε $x \in R - \{0, 1\}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x(x - 1)} - \frac{1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x(x - 1) \frac{2x^2 - 1}{x(x - 1)} - x(x - 1) \frac{1}{x - 1} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Για $\alpha = 2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -1$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η ρίζα $x = 1$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = -\frac{1}{2}$.

**85**

ΘΕΜΑ 2

α) Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 12 \text{ και } P = \alpha\beta = -64$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Για $\alpha = 1$, $\beta = -12$ και $\gamma = -64$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{12+20}{2} = 16 \\ \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 16 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 16)$$

86

ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

β) Πρέπει:

$$(2 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$$

γ) Για κάθε $x \leq 2$, είναι:

$$|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$



Τότε:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$$

Άρα $A = B$

87 ΘΕΜΑ 2

α) Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$5x + 2 = \frac{x+6+11x-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = \frac{12x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = 2$$

Είναι:

$$\omega = 5x + 2 - (x + 6) =$$

$$= 5x + 2 - x - 6 =$$

$$= 4x - 4 = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = \alpha_1 + (8-1)\omega = 0 + 7 \cdot 4 = 28$$

Τότε είναι:

$$S_8 = \frac{8}{2} (\alpha_1 + \alpha_8) = 4(0 + 28) = 4 \cdot 28 = 112$$

88 ΘΕΜΑ 2

α) • Είναι:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \\ &= \frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} + \frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \\ &= \frac{3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \\ &= \frac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$



- Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \\ &= \frac{1}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \\ &= \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = 3 \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{2}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

89

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot \Gamma &= \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \\ &= 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \\ &= \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25} \text{ και } B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{27}$$

Ισχύει ότι:

$$25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B$$

90

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \lambda^{5-1}}{\alpha_1 \lambda^{2-1}} = 27 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{81 - 1}{2} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$$

91 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Pi &= A^2 + B^2 = \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = \\ &= 2^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 2^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \\ &= 4 + 3 + 4 + 3 = 14 \end{aligned}$$

92 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|2x - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 1 < 2x - 1 + 1 < 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

β) Ισχύει ότι $0 < x < 1$, οπότε:

$$x < 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \cdot x < 1 \cdot x \Leftrightarrow x^2 < x$$

Τελικά:

$$x^2 < x < 1$$

**93**

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5 - 1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Έχουμε:

$$S_v = 77 \Leftrightarrow \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v - 1)\omega] = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v - 1)3] = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2}(4 + 3v - 3) = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2}(3v + 1) = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3v^2 + v}{2} = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v^2 + v = 154 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v^2 + v - 154 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1.848 = 1.849 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 43}{6} = \begin{cases} \frac{-1+43}{6} = 7 \\ \frac{-1-43}{6} = -\frac{44}{6} \end{cases}$$

Η τιμή $v = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται, καθώς $v \in \mathbb{N}$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε 7 όρους της προόδου ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με 77.

94

ΘΕΜΑ 2

α) Η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με την πρόσθεση του ίδια πάντα αριθμού.

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της είναι $\omega = 2$. Χρησιμοποιώντας τον



τύπο $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$ βρίσκουμε:

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 1 + 99 \cdot 2 = 1 + 198 = 199$$

β) Το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)\omega] = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2] = \\ &= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2 \end{aligned}$$

Επομένως, το άθροισμα είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

95 ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{3\}$.

Θα παραγοντοποιήσουμε το $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

β) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = x - 2, \quad x \neq 3$$

γ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -2)$.

**96****ΘΕΜΑ 2**

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda^2 + \lambda - 1$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4\end{aligned}$$

Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$$

Το τριώνυμο $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ έχει διακρίνουμε:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 16 + 48 = 64 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{4+8}{-6} = -2 \\ \frac{4-8}{-6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$-3\lambda^2-4\lambda+4$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

Επομένως ισχύει:

$$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \quad (1)$$

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1$$

Τότε:

$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \quad (2)$$

Από συναλήθευση των (1) και (2) έχουμε $\lambda \in [-2, -1]$

97 ΘΕΜΑ 2

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα τον ίδιο αριθμό, τα καθίσματα, αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

β) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + (7 - 1)\omega = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6\omega \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$S_{10} = 300 \Leftrightarrow \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10 - 1)\omega] = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(2\alpha_1 + 9\omega) = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\alpha_1 + 45\omega = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\omega = 60 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2(36 - 6\omega) + 9\omega = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 - 12\omega + 9\omega = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\omega = -12 \Leftrightarrow \omega = 4$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 36 - 6 \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12$$

Επομένως η πρώτη σειρά έχει $\alpha_1 = 12$ καθίσματα

Η δεύτερη σειρά έχει $\alpha_2 = 16$ καθίσματα.

Η τρίτη σειρά έχει $\alpha_3 = 20$ καθίσματα.

Η τέταρτη σειρά έχει $\alpha_4 = 24$ καθίσματα.

Η πέμπτη σειρά έχει $\alpha_5 = 28$ καθίσματα.

Η έκτη σειρά έχει $\alpha_6 = 32$ καθίσματα.

Η έβδομη σειρά έχει $\alpha_7 = 36$ καθίσματα.

Η όγδοη σειρά έχει $\alpha_8 = 40$ καθίσματα.

Η ένατη σειρά έχει $\alpha_9 = 44$ καθίσματα.

Η δέκατη σειρά έχει $\alpha_{10} = 48$ καθίσματα.

**98**

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$ και $\gamma = 4(\lambda - 1)$. Τότε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ &= (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = \\ &= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = \\ &= (2\lambda - 4)^2\end{aligned}$$

β) Επειδή $\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda \text{ και} \\ x_1 x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda - 1)}{1} = 4(\lambda - 1) = 4\lambda - 4\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= x_1 x_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\lambda &= 4\lambda - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 &= 2\lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda &= 2\end{aligned}$$

99

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|2x - 1| &= 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x - 1 &= 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x &= 4 \text{ ή } 2x = -2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x &= 2 \text{ ή } x = -1)\end{aligned}$$

β) Είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

Για $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

100 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |2x - 5| &\leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 + 5 &\leq 2x - 5 + 5 \leq 3 + 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 &\leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &\leq x \leq 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

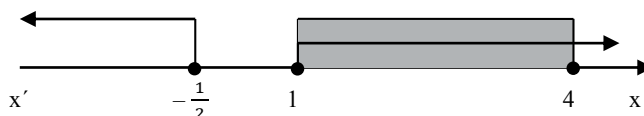
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - x - 1$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 1 \right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty) \quad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$

**101** ΘΕΜΑ 2

α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda + 1$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$(\lambda - 1 = 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

102 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$0 < \alpha < 1 \stackrel{\alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha^2 < 1 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 < \alpha^2$$

β) Ισχύει ότι:

$$\bullet 0 < \alpha \Leftrightarrow 0 < \alpha^3,$$

$$\bullet 0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha^3 < \alpha$$

$$\bullet \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1^3 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1,$$



$$\bullet 0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$$

Τελικά:

$$0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

103 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+3)^2 &= x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 = \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 &= 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x-1)^2 = 0 \text{ και } (y+3)^2 = 0) &\Leftrightarrow (x-1 = 0 \text{ και } y+3 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ και } y = -3) \end{aligned}$$

104 ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ και } x \neq -1) \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-1, 1\}$.

β) Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{5-1}{4} = 1 \end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-3)(x-1)$$

γ) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{x+1}, \quad (x \neq 1 \text{ και } x \neq -1)$$

**105** ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|x - 5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 5 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 5 < x - 5 + 5 < 2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < x < 7 \quad (1)$$

β) Ισχύει ότι:

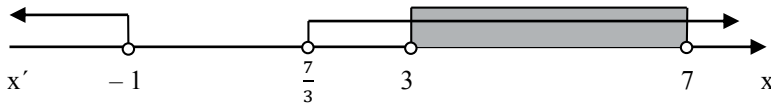
$$|2 - 3x| > 5 \Leftrightarrow 2 - 3x < -5 \quad \text{ή} \quad 2 - 3x > 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x < -5 - 2 \quad \text{ή} \quad -3x > 5 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3x < -7 \quad \text{ή} \quad -3x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x > \frac{7}{3} \quad \text{ή} \quad x < -1 \right) \quad (2)$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$3 < x < 7 \Leftrightarrow x \in (3, 7)$$

106 ΘΕΜΑ 2α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - 3x + 1$	+	$\circ$	-	$\circ$	+



Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

γ) • Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{3}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 3 < 4, \text{ ισχύει}$$

• Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{2}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 2 < 4, \text{ ισχύει}$$

Τελικά οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

107 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$3x - 1 < x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x < 9 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \quad (1)$$

Ισχύει ότι:

$$2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - x \leq 1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (2)$$

β) Συναληθεύουμε τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 \leq x < 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5)$$

108 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\bullet f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$$

$$\bullet f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = 0 + 0 - 15 = -15$$



$$\bullet f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$$

Τότε:

$$f(-1) + f(0) + f(1) = -16 - 15 - 12 = -43$$

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 15$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -15$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2+8}{2} = 3 \\ \frac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(-5, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = 0 + 0 - 15 = -15$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -15)$.

109 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|x - 2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 = \sqrt{3} \text{ ή } x - 2 = -\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3})$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

110 ΘΕΜΑ 2

α) Από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1}$ βρίσκουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 \lambda^{3-1} \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \lambda^2 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = \alpha_1 \lambda^{5-1} \Leftrightarrow 4 = \alpha_1 \lambda^4 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{4}{1} = \frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_1 \lambda^2} \Leftrightarrow 4 = \lambda^2 \Leftrightarrow (\lambda = -2, \text{ απορρίπτεται } \text{ ή } \lambda = 2) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$1 = \alpha_1 2^2 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

β) Ο v -οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = \frac{1}{4} \cdot 2^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_v = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_v = 2^{-2} \cdot 2^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_v = 2^{v-1-2} \Leftrightarrow \alpha_v = 2^{v-3}$$

111 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3(|x+1|+4) = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x+1| = 22 \Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1 = -11 \text{ ή } x+1 = 11) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -12 \text{ ή } x = 10)$$

β) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$



Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-x^2+2x+3$	-			-

Επομένως ισχύει:

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ή } x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

γ) Ο αριθμός -12 ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και ο αριθμός 10 ανήκει στο διάστημα $[3, +\infty)$. Συνεπώς και οι δύο αριθμοί είναι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης.

112 ΘΕΜΑ 2

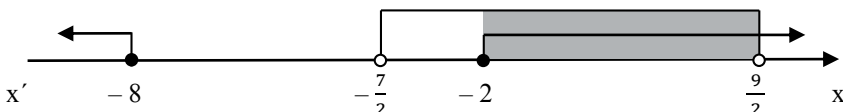
α) Είναι:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{1}{2} \right| &< 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4 &< x - \frac{1}{2} < 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4 + \frac{1}{2} &< x < 4 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{2} &< x < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |x + 5| &\geq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 5 &\leq -3 \text{ ή } x + 5 \geq 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x &\leq -8 \text{ ή } x \geq -2) \end{aligned}$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:





Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-2 \leq x < \frac{9}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right)$$

113 ΘΕΜΑ 2

α) Για κάθε $\alpha < 0$, ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Αφού $\alpha < 0$ είναι $|\alpha| = -\alpha$, Τότε:

$$|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \text{ ισχύει από σκέλος (α)}$$

114 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\begin{aligned} & |2x - 4| \geq 3|x - 1| \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 4 = -3(x - 1) \text{ ή } 2x - 4 = 3(x - 1)\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 4 = -3x + 3 \text{ ή } 2x - 4 = 3x - 3\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{5x = 7 \text{ ή } -x = 1\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{x = \frac{7}{5} \text{ ή } x = -1\right\} \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} & |3x - 5| > 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 5 < -1 \text{ ή } 3x - 5 > 1\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{3x < 4 \text{ ή } 3x > 6\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{x < \frac{4}{3} \text{ ή } x > 2\right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty) \end{aligned}$$

γ) Είναι $\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{21}{15} - \frac{20}{15} = \frac{1}{15} > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{4}{3}$ και $\frac{7}{5} - 2 = \frac{7}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{3}{5} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5} < 2$. Άρα

ο αριθμός $\frac{7}{5}$ δεν ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, οπότε δεν είναι λύση



της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

Είναι $-1 < 0 < \frac{4}{3}$, άρα ο αριθμός -1 ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$,

οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

115 ΘΕΜΑ 2

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$ και βρίσκουμε:

$$2+1 \leq x+y \leq 3+2 \Leftrightarrow 3 \leq x+y \leq 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \leq x \leq 3$ με 2 και βρίσκουμε:

$$2 \cdot 2 \leq 2x \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq y \leq 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$(-3) \cdot 1 \geq -3y \geq (-3) \cdot 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4-6 \leq 2x-3y \leq 6-3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x-3y \leq 3.$$

γ) Ισχύει ότι:

$$2 \leq x \leq 3 \quad (3) \quad \text{και} \quad 1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3.$$

116 ΘΕΜΑ 2

α) • Για $\lambda = -1$, η εξίσωση γράφεται:

$$((-1)^2 - 9)x = (-1)^2 - 3(-1) \Leftrightarrow -8x = 4$$

• Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γράφεται:

$$(0^2 - 9)x = 0^2 - 3 \cdot 0 \Leftrightarrow -9x = 0$$

• Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γράφεται:

$$(1^2 - 9)x = 1^2 - 3 \cdot 1 \Leftrightarrow -8x = -2$$



β) Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 9 &\neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3) &\neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 3 \neq 0 \text{ και } \lambda + 3 &\neq 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda \neq 3 \text{ και } \lambda &\neq -3)\end{aligned}$$

γ) Για $x = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - 9) \cdot 4 &= \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4(\lambda - 3)(\lambda + 3) &= \lambda(\lambda - 3) \stackrel{\lambda \neq 3}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \frac{4(\lambda - 3)(\lambda + 3)}{\lambda - 3} &= \frac{\lambda(\lambda - 3)}{\lambda - 3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4(\lambda + 3) &= \lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\lambda + 12 &= \lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\lambda &= -12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda &= -4\end{aligned}$$

117 ΘΕΜΑ 2

α) Η πρόοδος που έχει δοθεί είναι αριθμητική με $a_1 = 1$ και $\omega = 1$. Τότε:

$$\begin{aligned}S_v &= \frac{v}{2}[2a_1 + (v - 1)\omega] = \\ &= \frac{v}{2}[2 \cdot 1 + (v - 1) \cdot 1] = \\ &= \frac{v}{2}(2 + v - 1) = \\ &= \frac{v}{2}(1 + v) = \frac{v + v^2}{2}\end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned}S_v = 45 &\Leftrightarrow \frac{v + v^2}{2} = 45 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v^2 + v &= 45 \cdot 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v^2 + v - 90 &= 0\end{aligned}$$



Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 > 0$$

και οι ρίζες είναι:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η τιμή $v = -10$ απορρίπτεται. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 9 διαδοχικούς θετικού ακέραιους για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

118

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha| \cdot |\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta),$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

119

ΘΕΜΑ 2

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A = (-\infty, 3] \cup (3, 10) = (-\infty, 10)$$

β) Είναι:

- $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$
- $f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$
- $f(5) = 5^2 = 25$

γ) • Για $x \leq 3$ είναι:

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow 2x - 5 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15, \text{ απορρίπτεται}$$

• Για $3 < x < 10$ είναι:

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \text{ ή } x = -5, \text{ απορρίπτεται}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

120 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0, \text{ το οποίο ισχύει}$$

β) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \quad (1)$$

και όμοια αποδεικνύουμε ότι:

$$\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

121 ΘΕΜΑ 2

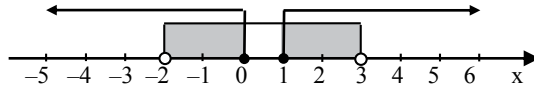
α) i) Είναι:

$$\begin{aligned} |1 - 2x| < 5 &\Leftrightarrow -5 < 1 - 2x < 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 - 1 < 1 - 2x - 1 < 5 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6 < -2x < 4 \Leftrightarrow \frac{-6}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 3 \end{aligned}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |1 - 2x| \geq 1 &\Leftrightarrow (1 - 2x \leq -1 \text{ ή } 1 - 2x \geq 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2x \leq -2 \text{ ή } -2x \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2} \leq \frac{0}{-2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \geq 1 \text{ ή } x \leq 0) \end{aligned}$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπω φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-2 < x \leq 0 \text{ ή } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 0] \cup [1, 3)$$

Οι ακέραιες λύσεις είναι οι:

$$x = -1, x = 0, x = 1 \text{ και } x = 2$$

122 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2,24 = 4,48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3 \cdot 2,24 = 6,72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2,24 = 8,96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$$

123 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(x - 4 \geq 0 \text{ και } x + 1 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } x \geq -1) \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = \\ &= x - 4 - (x + 1) = x - 4 - x - 1 = -5 \end{aligned}$$

124 ΘΕΜΑ 2

α) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 3 < \sqrt[3]{30} < 4 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 27 < 30 < 64, \text{ το οποίο ισχύει} \end{aligned}$$

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30}$. Τότε:

$$\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} < 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} < 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3 < 3^3 \Leftrightarrow 30 < 27, \text{ άτοπο}$$

$$\text{Άρα } \sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}.$$

**125** ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(x - 4 \geq 0 \text{ και } 6 - x \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } -x \geq -6) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } x \leq 6) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [4, 6]$$

β) Για $x = 5$, είναι:

$$A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$$

Τότε:

$$A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

126 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(x^2 + 4 \geq 0 \text{ και } x - 4 \geq 0) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 4) \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Για $x = 4$, είναι:

$$A = \sqrt{4^2 + 4} - \sqrt{4 - 4} = \sqrt{16 + 4} - \sqrt{0} = \sqrt{20}$$

Τότε:

$$A^2 - A = \sqrt{20}^2 - \sqrt{20} = 20 - \sqrt{4 \cdot 5} = 20 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \\ = 20 - 2\sqrt{5} = 2(10 - \sqrt{5})$$

127 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(1 - x \geq 0 \text{ και } x^4 \geq 0) \Leftrightarrow (-x \geq -1 \text{ και } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$$

β) Για $x = -3$, είναι:

$$A = \sqrt{1 - (-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt{1 + 3} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Τότε:

$$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

128 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει:

$$(x - 2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

β) Για $x = 4$, είναι:

$$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Τότε:

$$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$$

129 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = [(\sqrt{2})^2]^3 - [(\sqrt[3]{2})^3]^2 = \\ = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$



β) Ισχύει ότι:

$$1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

και

$$A - B = 4 > 0 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 > (\sqrt[3]{2})^6 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

130 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$|x + 1| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < x + 1 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 < x + 1 - 1 < 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$$

β) Από το σκέλος (α) ισχύει ότι:

$$-3 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 < x \text{ και } x < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < x + 3 \text{ και } x - 1 < 0)$$

Άρα:

$$|x + 3| = x + 3 \text{ και } |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$$

Τότε:

$$K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4} = \frac{x+3+1-x}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

131 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$1 < x < 4 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 4) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x < 4)$$

$$\text{Άρα } |x - 1| = x - 1$$

Ισχύει ακόμη ότι:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y < 3) \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y - 3 < 0)$$

$$\text{Άρα } |y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$$

Τότε:

$$A = |x - 1| + |y - 3| = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$$

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < -y + 2 < -2 + 2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 - 1 < x - y + 2 < 0 + 4 \Leftrightarrow 0 < x - y + 2 < 4$$

132 ΘΕΜΑ 2

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

β) i) Πρέπει:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 \neq 0 &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2 \neq 0 \text{ και } x - 3 \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \neq 2 \text{ και } x \neq 3) \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

133 ΘΕΜΑ 4

α) Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών είναι κατ' εκτίμηση το $A(100, 500)$.

Η ερμηνεία του είναι η εξής:

Αν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα λάδι τα έσοδα και τα έξοδά της είναι 500 ευρώ, δηλαδή δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β) Τα πάγια έξοδα της εταιρείας είναι 200 ευρώ, διότι $K(0) = 200$. Δηλαδή ακόμα κι αν δεν παραχθεί λάδι ($x = 0$), υπάρχουν έξοδα.

γ) Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα ή μεγαλύτερα από αυτά. Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει για παραγωγή $x \geq 100$ λίτρων λαδιού.



δ) Έστω $y = ax$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ϵ) που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων $E(x)$. Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(200, 1000)$, οπότε:

$$1000 = 200a \Leftrightarrow a = 5$$

Τελικά η ευθεία (ϵ) έχει εξίσωση:

$$y = 5x$$

και η συνάρτηση των εσόδων είναι η $E(x) = 5x$, $x \geq 0$

Έστω $y = \alpha_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) που περιγράφει τη συνάρτηση εξόδων $K(x)$. Η ευθεία (ϵ_1) διέρχεται από τα σημεία $B(0, 200)$ και $\Gamma(200, 800)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\alpha_1 = \frac{800-200}{200-0} = \frac{600}{200} = 3$$

Τότε η ευθεία (ϵ_1) γράφεται:

$$y = 3x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (ϵ_1) διέρχεται από το $B(0, 200)$ οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, οπότε:

$$200 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 200$$

Τελικά η ευθεία (ϵ_1) έχει εξίσωση:

$$y = 3x + 200$$

και η συνάρτηση των εξόδων είναι η $K(x) = 3x + 200$, $x \geq 0$

Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει:

$$E(x) \geq K(x) \Leftrightarrow$$

$$5x \geq 3x + 200 \Leftrightarrow$$

$$2x \geq 200 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 100$$

Επομένως, η εκτίμηση που κάναμε στο σκέλος (γ) ήταν σωστή.

134 ΘΕΜΑ 4

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων ω , οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) , με $\alpha_1 = 16$ και διαφορά ω .

Είναι:

$$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (7 - 1)\omega = 28 \Leftrightarrow$$

$$16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow$$

$$6\omega = 12 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 2$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v = 16 + (v - 1)2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v = 16 + 2v - 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v = 14 + 2v, \quad \text{με } 1 \leq v \leq 20$$

γ) Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2\alpha_1 + (20 - 1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(2 \cdot 16 + 19 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(32 + 38) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10 \cdot 70 \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 700$$

δ) Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος (β_v) με $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$. Ο v -οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$\beta_v = \beta_1 + (v - 1)\omega' \Leftrightarrow$$

$$\beta_v = 6 + (v - 1)3 \Leftrightarrow$$

$$\beta_v = 6 + 3v - 3 \Leftrightarrow$$

$\beta_v = 3 + 3v$, με $1 \leq v \leq 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δεν μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς. Δηλαδή πρέπει $\beta_v \leq \alpha_v \Leftrightarrow v \leq 11$)

ι) Όλα τα καθίσματα της v -οστής σειράς θα είναι κενά, όταν:



$$\beta_v = \alpha_v \Leftrightarrow$$

$$3 + 3v = 14 + 2v \Leftrightarrow$$

$$v = 11$$

Άρα από την 11^η σειρά μέχρι και την 20^η όλα τα καθίσματα του θεάτρου είναι κενά.

ii) Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}[2\beta_1 + (10 - 1)\omega'] \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(2 \cdot 6 + 9 \cdot 3) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(12 + 27) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5 \cdot 39 \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10 - 1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(2 \cdot 16 + 9 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(32 + 18) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός των θεατών αφού από την 11^η σειρά και μετά τα καθίσματα είναι κενά.

135 ΘΕΜΑ 4

α) Η εξίσωση είναι 1^{ου} βαθμού όταν

$$8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού για $\lambda \neq 8$. Για να έχει η εξίσωση αυτή μια διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$[-2(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot (8 - \lambda) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda - 2)^2 - 4(8 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 25$ και ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{που έχει διπλή ρίζα την } x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\text{που έχει διπλή ρίζα την } x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-6}{2 \cdot 9} = -\frac{1}{3}$$

- γ)** Για $\lambda = 4$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0,$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x .

- Για $\lambda = -1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \geq 0$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x .

**136** ΘΕΜΑ 4

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + x - 2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.

Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, $g(\alpha) < 0$. Επίσης όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, το $(\alpha + 3) \in (2, 4) \cup (4, 5)$, οπότε $g(\alpha + 3) > 0$.

Άρα $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$.

137 ΘΕΜΑ 4

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Επειδή $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, προκύπτει ότι $g(\alpha) < 0$ και $g(\beta) < 0$.

Τελικά $g(\alpha)g(\beta) > 0$.

138 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \end{aligned}$$



$$= (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

γ) Είναι $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$(\lambda < 0 \text{ και } \Delta \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } \lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\lambda < 0 \text{ και } (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1)]$$

Άρα $\lambda = -1$.

139 ΘΕΜΑ 4

Η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$. Στο τέλος της ν-οστής ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $\alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ τετραγωνικά μίλια (τ.μ.).

α) Στο τέλος της 5^{ης} ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια: $\alpha_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ τ.μ.

β) Δεδομένο είναι ότι $\alpha_n = 768$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_n = 768$$

$$3 \cdot 2^{n-1} = 768$$

$$2^{n-1} = 256$$

$$v - 1 = 8 \quad (2^8 = 256)$$

$$v = 9$$

Οπότε στο τέλος της 9^{ης} ημέρας θα έχει καλυφθεί από πετρέλαιο θαλάσσια επιφάνεια 768 τ.μ.

γ) Στο τέλος της 10^{ης} ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που έχει καλυφθεί από πετρέλαιο είναι $768 - 6 = 762$ τ.μ. και κάθε επόμενη ημέρα θα μειώνεται κατά 6 τ.μ. Άρα η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που θα καλύπτει εφεξής το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$.

Δεδομένο είναι ότι $\beta_v = 12$ και ζητούμενο είναι το v . Έχουμε ισοδύναμα:

$$\beta_v = 12$$

$$762 + (v - 1) \cdot (-6) = 12$$

$$6v = 756$$

$$v = 126$$

Συνεπώς στο τέλος της 126^{ης} ημέρας μετά την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της $9 + 126 = 135$ ^{ης} ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

140 ΘΕΜΑ 4

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

Άρα οι C_f , C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το $A(-1, g(-1))$ δηλαδή το $A(-1, 0)$ (η ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_h είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = h(x)$. Δηλαδή:

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow$$



$$x^2 + 3x + 2 = x + \alpha \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + (2 - \alpha) = 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \alpha) = 4 - 8 + 4\alpha = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$$

i) Αν $\alpha > 1$, τότε $\Delta > 0$ και η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha < 1$, τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

141 ΘΕΜΑ 4

Τα βακτήρια (το πλήθος τους) στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (α_v) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) Ο v -στός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

β)

i) Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$

ii) Είναι

$$\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\beta_v = 9600 \cdot 3^{v-1}, v \leq 5$$

iii) Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$\beta_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400$$

142 ΘΕΜΑ 4

Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει $3 + 0,5 = 3,5\text{€}$, ο τρίτος θα πληρώσει $3,5 + 0,5 = 4\text{€}$ και ο τέταρτος θα πληρώσει $4 + 0,5 = 4,5\text{€}$.

β) Δεδομένου ότι ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο, οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 0,5$.

γ) Ο 51^{ος} επιβάτης θα πληρώσει: $\alpha_{51} = 3 + (51 - 1) \cdot 0,5 = 28\text{€}$

δ) Ζητάμε την μικότερη τιμή του φυσικού αριθμού n ώστε $S_n > 30 \cdot 21$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$S_n > 30 \cdot 21$$

$$\frac{n}{2} [2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 0,5] > 630$$

$$\frac{n}{2} \left[6 + \frac{(n-1)}{2} \right] > 630$$

$$\frac{n}{2} \left[\frac{12 + n - 1}{2} \right] > 630$$

$$\frac{n(11+n)}{4} > 630$$

$$n^2 + 11n - 2520 > 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 11^2 - 4(-2520) = 10201$ και ρίζες $n = 45$, $n = -56$ (απορρίπτεται). Η (1) αληθεύει για φυσικούς αριθμούς $n > 45$. Συνεπώς πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

**143**

ΘΕΜΑ 4

α) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

β) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1$$

Συνεπώς και για $\lambda = -1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

γ) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 5$$

δ) Αν

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\},$$

τότε $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0$, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$ είναι αρνητική, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

144

ΘΕΜΑ 4

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$ και $\gamma = \lambda$. Οπότε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2 + 1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

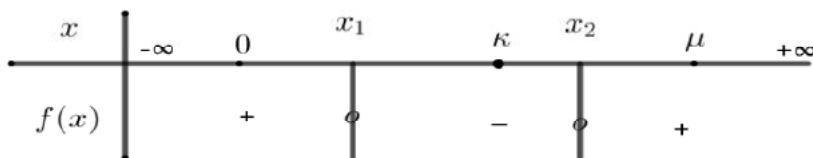
γ) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$, άρα οι ρίζες του είναι ομόσημες. Αν επιπλέον $\lambda > 0$, τότε και $S > 0$. Οπότε οι ρίζες θα είναι θετικές (δυο ομόσημοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι θετικό, είναι θετικοί).

δ) Για $\lambda > 0$ και $\lambda \neq 1$ το τριώνυμο $f(x)$ έχει δυο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2 που λόγω του γ ερωτήματος είναι θετικές. Επίσης είναι δεδομένο ότι κ και μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, που έχει

$$\alpha = \lambda > 0$$



Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου προκύπτει λοιπόν ότι:

$$f(0) > 0$$

$$f(\kappa) < 0$$

$$f(\mu) > 0$$

$$\text{Άρα: } f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$$

**145** ΘΕΜΑ 4

α) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x' τις βρίσκουμε λύνοντας την εξίσωση $g(x) = 0$. Τότε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

β) Είναι:

$$f(3) = 4 \cdot 3 + 2 = 14 \neq 0 \text{ και}$$

$$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 2 = -10 \neq 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο $(x_0, 0)$ του άξονα x' στο οποίο τέμνονται οι C_f , C_g . Τότε ισχύει:

$$(f(x_0) = 0 \text{ και } g(x_0) = 0) \Leftrightarrow$$

$$(4x_0 + 2 = 0 \text{ και } x_0^2 - 9 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0 = -\frac{1}{2} \text{ και } x_0 = \pm 3 \right)$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x' .

Έστω οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$. Τότε πρέπει:

$$f(0) = g(0) \Leftrightarrow 2 = -9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$.

δ) Επειδή η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, η εξίσωση της θα έχει τη μορφή

$$h(x) = ax + \beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ ισχύει ότι:

$$h(0) = 3 \Leftrightarrow$$

$$a \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 3$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$$h(x) = ax + 3, \quad a \in \mathbb{R}$$

Επίσης η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox οπότε ισχύει:

$$h(3) = g(3) \Leftrightarrow 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = -3 \Leftrightarrow a = -1$$

Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση έχει τύπο $h(x) = -x + 3$.

146 ΘΕΜΑ 4

α) Ισχύει ότι:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow$$

$$(2x^2 - 3x - 4) - x = (x^2 - 2) - (2x^2 - 3x - 4) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -\frac{2}{3} \text{ (απορρίπτεται γιατί δεν είναι ακέραιος)}$$

Άρα $x = 3$ και οι τρεις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ και $\alpha_3 = 7$

β) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα ο n -οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1$$

Αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014 θα πρέπει η εξίσωση $\alpha_n = 2014$ να έχει λύση φυσικό αριθμό.

Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha_n = 2014 \Leftrightarrow$$

$$2n + 1 = 2014 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{2013}{2} = 1006,5 \text{ που δεν είναι φυσικός αριθμός}$$

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

$$\gamma) S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \dots + 31$$

Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 3$ και $\omega' = 4$. Πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Έχουμε $\beta_n = 31 \Leftrightarrow 3 + (n-1) \cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4n = 32 \Leftrightarrow n = 8$. Οπότε το πλήθος των όρων είναι 8.

$$\text{Οπότε } S = S_8 = \frac{8}{2} [2 \cdot 3 + (8-1) \cdot 4] = 136$$

147 ΘΕΜΑ 4

α) Εάν η εταιρεία δεν κατασκευάζει μπλουζάκια, θέτουμε $x = 0$ στη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και βρίσκουμε $K(0) = 120$ €.

Επομένως η εταιρεία χωρίς να κατασκευάζει μπλουζάκια έχει (πάγια) έξοδα 120 €.

β) Η μοναδιαία μεταβολή στο x , δηλαδή αν τα μπλουζάκια που κατασκευάζονται αυξηθούν κατά 1 (από x γίνουν $x + 1$), θα προκαλέσει σταθερή μεταβολή 12,5 ευρώ στο κόστος κατασκευής και σταθερή μεταβολή στα έσοδα 15,5 ευρώ. Δηλαδή $K(x+1) - K(x) = 12,5$ και $E(x+1) - E(x) = 15,5$.

γ) Τα μπλουζάκια που πρέπει να πωληθούν ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα είναι η λύση της εξίσωσης:

$$E(x) = K(x) \Leftrightarrow$$

$$15,5x = 12,5x + 120 \Leftrightarrow$$

$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Άρα πρέπει να παραχθούν 40 μπλουζάκια ώστε η επιχείρηση να «μην μπαίνει μέσα».

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, τα έσοδα θα είναι:

$$E(60) = 15,5 \cdot 60 = 930 \text{ €}$$

και τα έξοδα:

$$K(60) = 12,5 \cdot 60 + 120 = 870 \text{ €}$$

Άρα το κέρδος τους θα είναι $930 - 870 = 60$ €

148 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2(\lambda - 1)x + (\lambda + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2(\lambda - 1)$, $\gamma = \lambda + 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda + 5) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \quad (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα: $\Delta_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$	+	○	○	+

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 4$$

γ) Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda-1)}{1} = 2(\lambda-1) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda+5$$

Τότε, για $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$[2(\lambda-1)]^2 - 4(\lambda+5) = 24 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

**149** ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Άρα $A_f = (-3, 3)$

β) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y = 0$, δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \frac{2}{3})$.

γ) Έστω (ε): $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A, B είναι:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{2}{3} - 0}{0 - (-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας γράφεται:

$$(ε): y = \frac{1}{3}x + \beta$$

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$, οι συντεταγμένες του σημείου την επα-
ισχύει δηλαδή ότι:

$$0 = \frac{1}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow$$

$$0 = -\frac{2}{3} + \beta \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{2}{3}$$

Τελικά η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

150 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2$ έχει

$$\alpha = \lambda + 2, \beta = 2\lambda + 3, \gamma = \lambda - 2$$

και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda + 3)^2 - 4 \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4(\lambda^2 - 2^2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 = 12\lambda + 25$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda > -25 \Leftrightarrow$$

$$\lambda > -\frac{25}{12}$$

Επειδή επιπλέον πρέπει $\lambda \neq -2$, τελικά βρίσκουμε:

$$\lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty)$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}$$

δ) Για $\lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty)$, είναι:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(S - 1)^2 + (P + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(S - 1 = 0 \text{ και } P + 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(S = 1 \text{ και } P = -3) \stackrel{(v)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} = 1 \text{ και } \frac{\lambda-2}{\lambda+2} = -3\right) \Leftrightarrow$$

$$-(2\lambda + 3) = \lambda + 2 \text{ και } \lambda - 2 = -3(\lambda + 2)) \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda - 3 = \lambda + 2 \text{ και } \lambda - 2 = -3\lambda - 6) \Leftrightarrow$$



$$(-3\lambda = 5 \text{ και } 4\lambda = -4) \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda = -\frac{5}{3} \text{ και } \lambda = -1\right)$$

Επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ που να ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση.

151 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 + \alpha) = (\alpha + 1)^2 - 4(4 + \alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 16 - 4\alpha = (\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 16 =$$

$$= (\alpha - 1)^2 - 16$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 > 16 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2} > \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$|\alpha - 1| > 4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1 < -4 \text{ ή } \alpha - 1 > 4) \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -3 \text{ ή } \alpha > 5$$

γ) i) Είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\alpha+1)}{1} = \alpha + 1 \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+\alpha}{1} = 4 + \alpha$$

ii) Ισχύει ότι:

$$d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1| = |(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)| = |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |P - S + 1| =$$

$$= |4 + \alpha - \alpha - 1 + 1| = 4$$

152 ΘΕΜΑ 4

α) i) Ισχύει ότι:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow$$

$$(t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή } t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)) \Leftrightarrow$$

$$(t_A + t_B = 2t_\Delta) \Leftrightarrow$$

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Είναι:

$$t_r - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0. \quad \text{Άρα } t_r < t_B \quad (1)$$

Ισχύει ότι:

$$t_\Delta - t_r = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0. \quad \text{Άρα } t_\Delta < t_r \quad (2)$$

Έχουμε:

$$t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0. \quad \text{Άρα } t_A < t_\Delta \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$t_A < t_\Delta < t_r < t_B$$

Επομένως, 1^{ος} τερμάτισε ο Αργύρης, 2^{ος} ο Δημήτρης, 3^{ος} ο Γιώργος και 4^{ος} ο Βασίλης.

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $t^2 - 6t + 8 = 0$

ii) Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει ρίζες $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως:

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ λεπτά και}$$

$$t_r = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2+2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3} \text{ λεπτά}$$

153 ΘΕΜΑ 4

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \lambda x + (\lambda - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές, οπότε οι C_f , C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου τουλάχιστον κοινό σημείο.



β) Η (1) έχει μια ρίζα διπλή, δηλαδή οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

Τότε, για $\lambda \neq 2$ έχουμε:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε $|\lambda| = \alpha > 0$ και η εξίσωση (2) γράφεται: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ με ρίζες $\alpha = 2$, $\alpha = -1$ (απορρίπτει)
Άρα:

$$|\lambda| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε $\lambda = -2$.

154 ΘΕΜΑ 4

α) Όταν η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$$y = 0 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5t(12 - t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 12$$

Για $t = 0 \text{ sec}$ η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησης οπότε απορρίπτεται. Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από $t = 12 \text{ sec}$.

β) Ισχύει ότι:

$$y = 175 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 60t + 175 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 5 \text{ ή } t = 7$$

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175m τις χρονικές στιγμές 5 sec και 7 sec.

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν:

$$y > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$-5t^2 + 60t - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 20 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$	2	10	$+\infty$	
$t^2 - 12t + 20$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 12t + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 10$$

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 sec και 10 sec.

155 ΘΕΜΑ 4

α) Ο αθλητής, όταν κολυμπάει ύπτιο, καίει 9 θερμίδες το λεπτό. Άρα σε 32 λεπτά θα έχει κάψει $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.

Ο αθλητής, όταν κολυμπάει πεταλούδα, καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Αν υποθέσουμε ότι κολυμπάει με αυτό το στυλ x λεπτά, τότε θα κάψει $12 \cdot x$ θερμίδες. Επειδή ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες, ισχύει ότι:

$$288 + 12x = 360 \Leftrightarrow$$

$$12x = 72 \Leftrightarrow$$

$x = 6$ λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα.

β) i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Τότε, για να κάψει 360 θερμίδες κολυμπώντας και με τα δύο στυλ, πρέπει να ισχύει:

$$9x + 12y = 360 \Leftrightarrow$$

$$12y = 360 - 9x \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{360}{12} - \frac{9x}{12} \Leftrightarrow$$



$$y = 30 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{Άρα: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

ii) Επειδή τα x , $f(x)$ είναι μεταβλητές χρόνου, πρέπει $x \geq 0$ και $f(x) \geq 0$.

Τότε:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}x \leq 30 \Leftrightarrow$$

$$3x \leq 120 \Leftrightarrow$$

$$x \leq 40$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A_f = [0, 40]$

γ) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$, δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

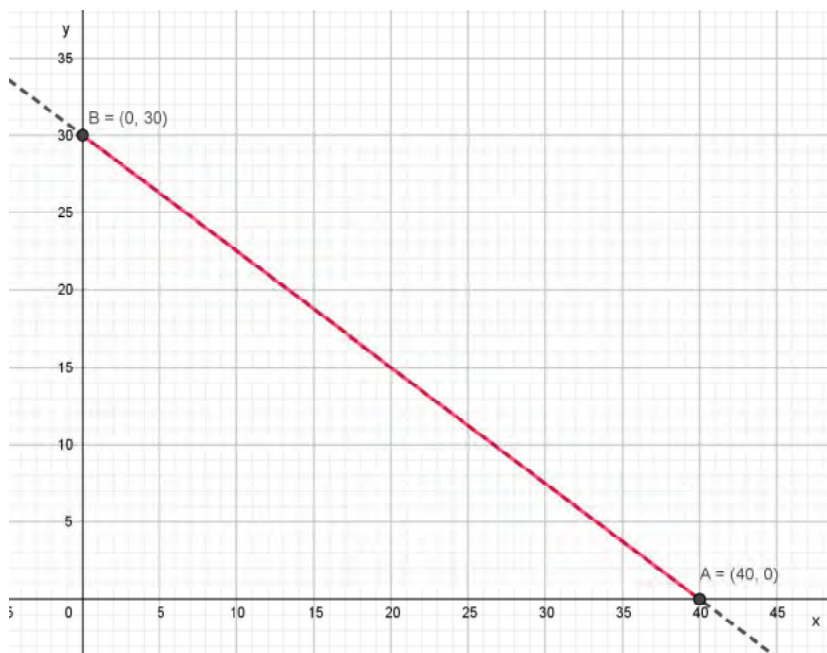
$$x = 40$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(40, 0)$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = 30 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 30$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 30)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB (τμήμα της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A, B). Επομένως είναι:



Το σημείο A δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει πεταλούδα χρειάζεται 40 λεπτά ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες ενώ το σημείο B δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

156 ΘΕΜΑ 4

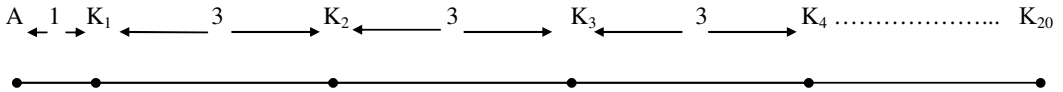
α) Οι αποστάσεις (α_i) , $i = 1, 2, \dots, 20$ των κυψελών $K_1, K_2, K_3, K_4, \dots, K_{20}$ από την αποθήκη A διαφέρουν πάντα κατά τον σταθερό αριθμό 3. Αποτελούν επομένως διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ (η απόσταση της κυψέλης K_1 από την αποθήκη A) και διαφορά $\omega = 3$.

Ο $n^{\text{ος}}$ όρος της προόδου είναι :

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$$

$$\alpha_n = 1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$\alpha_n = 3n - 2$$



$$AK_1 = \alpha_1$$

$$AK_2 = \alpha_2$$

$$AK_3 = \alpha_3$$

$$AK_4 = \alpha_4$$

$$AK_{20} = \alpha_{20}$$

β) Αναζητούμε τον όρο α_{20} .

$$\alpha_{20} = 3 \cdot 20 - 2 = 58$$

Επομένως η 20η κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α απόσταση 58 m.

γ) i) Η διαδρομές που θα κάνει ο μελισσοκόμος είναι:

$$A \rightarrow K_1 \rightarrow A, \quad A \rightarrow K_2 \rightarrow A, \quad A \rightarrow K_3 \rightarrow A$$

Άρα θα διανύσει:

$$(1 + 1) + (4 + 4) + (7 + 7) = 24 \text{ μέτρα}$$

ii) Η συνολική απόσταση μέχρι να πάει την 20η κυψέλη είναι S_{20} . Επομένως για να γυρίσει πρέπει να διανύσει πάλι απόσταση S_{20} . Τελικά η ζητούμενη συνολική απόσταση είναι:

$$2S_{20} = 2 \cdot \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 20(1 + 58) = 20 \cdot 59 = 1.180 \text{ μέτρα}$$

157 ΘΕΜΑ 4

α) Η εξίσωση (1) είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1] = 0 \Leftrightarrow^{\lambda \neq 1}$$

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0,$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\lambda+1)) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2 \cdot \lambda} = \frac{\lambda+1 \pm (\lambda-1)}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda} = 1 \\ \frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

158 ΘΕΜΑ 4

α) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$0 \cdot x^2 + 2(0-1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

β) i) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + 2(\lambda-1)x + \lambda - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [2(\lambda-1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda-2) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4$$

Επειδή είναι $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot \lambda} = \frac{(-2\lambda+2) \pm 2}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{-2\lambda+2+2}{2\lambda} = \frac{-\lambda+2}{\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda+2-2}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| -1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda} \right) \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| -1 + 1 - \frac{2}{\lambda} \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{2}{\lambda} \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$$

Τελικά $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

**159** ΘΕΜΑ 4

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων ακολουθεί τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

α) Η μεσαία σειρά έχει:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + (13 - 1)\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 12 + 24 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + (25 - 1)\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 12 + 48 = 60 \text{ καθίσματα}$$

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$\begin{aligned} S &= S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}[2\alpha_1 + (14 - 1)\omega] - \frac{6}{2}[2\alpha_1 + (6 - 1)\omega] = \\ &= 7 \cdot (2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) = \\ &= 7 \cdot (24 + 26) - 3 \cdot (24 + 10) = \\ &= 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248 \end{aligned}$$

160 ΘΕΜΑ 4

α) Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2 \text{ cm}^2$.

Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d + 1)^2 \text{ cm}^2$.

β) i) Αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι E , τότε ισχύει:

$$E = 200d^2 \text{ και } E = 128(d + 1)^2$$

161 ΘΕΜΑ 4

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x - 1 - 1 = x - 2 \text{ και } x - 2 - 2 = x - 4$$

Επομένως, το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4), \quad 5 \leq x \leq 10$$

β) Είναι:

$$E(x) = 35 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5 \leq x \leq 10$, δεχόμαστε την τιμή $x = 9$ cm.

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 16$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$	+	○	○	+

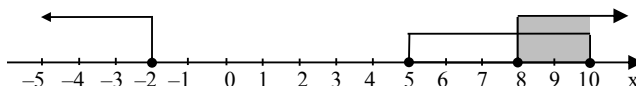
Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ή } x \geq 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty) \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \leq x \leq 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:





οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$8 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow x \in [8, 10]$$

162 ΘΕΜΑ 4

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x - 1 - 1 = x - 2 \text{ και } x - 2 - 2 = x - 4$$

Επομένως, το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8, \quad 5 \leq x \leq 10$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) = 24 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5 \leq x \leq 10$, δεχόμαστε την τιμή $x = 8$ cm.

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$\begin{aligned} E(x) \leq 35 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 35 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \leq 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -27$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

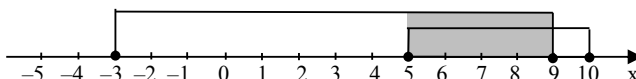
x	$-\infty$	-3	9	$+\infty$
$x^2 - 6x - 27$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσημίων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 27 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow x \in [-3, 9] \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \leq x \leq 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$5 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow x \in [5, 9]$$

163 ΘΕΜΑ 4

α) Η πρόταση Π1 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$F = 1,8C + 32 \quad (1)$$

Η πρόταση Π2 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$K = C + 273 \quad (2)$$

β) Η ισότητα (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$F = 1,8C + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1,8C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1,8} \quad (3)$$

Τότε η ισότητα (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$K = C + 273 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} K = \frac{F-32}{1,8} + 273 \quad (4)$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$278 \leq K \leq 283 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 278 \leq \frac{F-32}{1,8} + 273 \leq 283 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 278 - 273 \leq \frac{F-32}{1,8} + 273 - 273 \leq 283 - 273 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq \frac{F-32}{1,8} \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 1,8 \leq \frac{F-32}{1,8} \cdot 1,8 \leq 10 \cdot 1,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq F - 32 \leq 18 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow 9 + 32 \leq F - 32 + 32 \leq 18 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 \leq F \leq 50$$

164 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$, $\gamma = \lambda^2 - 1$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{2\lambda+2}{2} = \lambda + 1 \\ \frac{2\lambda-2}{2} = \lambda - 1 \end{cases}$$

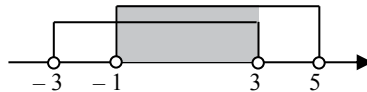
γ) Είναι:

$$(-2 < \lambda + 1 < 4 \text{ και } -2 < \lambda - 1 < 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 - 1 < \lambda + 1 - 1 < 4 - 1 \text{ και } -2 + 1 < \lambda - 1 + 1 < 4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 < \lambda < 3 \text{ και } -1 < \lambda < 5)$$

Συναληθεύουμε τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:



$$-1 < \lambda < 3 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 3)$$

165 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνόμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνόμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

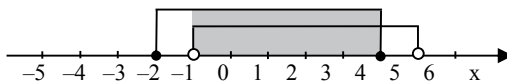
x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	+	○	○	+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (-1, 4]$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 4]$ ισχύει ότι:

$$-1 < \rho_1 \leq 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad -1 < \rho_2 \leq 4 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-1 - 1 < \rho_1 + \rho_2 \leq 4 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 + \rho_2 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2} < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \leq 4$$

Άρα $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \in (-1, 4]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**166** ΘΕΜΑ 4

α) • Είναι:

$$2 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow (2 \leq |x| \text{ (1) και } |x| \leq 3 \text{ (2)})$$

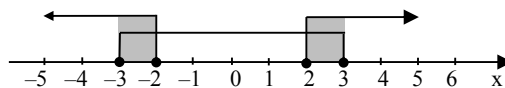
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$|x| \geq 2 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2) \text{ (3)}$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \text{ (4)}$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \leq x \leq -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \text{ (5)}$$

• Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 4)$$

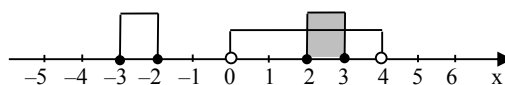
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	○	○	+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4) \text{ (6)}$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ ισχύει ότι:

$$2 \leq \rho_1 \leq 3 \quad (7) \quad \text{και} \quad 2 \leq \rho_2 \leq 3 \quad (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 2 + 2 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 3 + 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 6 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \leq \frac{6}{2} &\Leftrightarrow 2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \leq 3 \end{aligned}$$

Άρα $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \in [2, 3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. Ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

167 ΘΕΜΑ 4

α) • Είναι:

$$|x + 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - 1 \leq x + 1 - 1 \leq 2 - 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

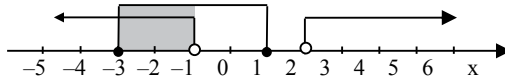
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 > 0 &\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (2) \end{aligned}$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \leq x < -1 \Leftrightarrow x \in [-3, -1)$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ ισχύει ότι:

$$-3 \leq \rho_1 < -1 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$-3 \leq \rho_2 < -1 \Leftrightarrow 1 < -\rho_2 \leq 3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$-3 + 1 < \rho_1 - \rho_2 < -1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

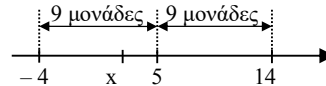
Άρα $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

168 ΘΕΜΑ 4

α) Η απόσταση του σημείου $M(x)$ του άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο $A(5)$ είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β) Από το διπλανό σχήμα βρίσκουμε ότι:

$$x \in [-4, 14]$$



γ) Είναι:

$$d(x, 5) \leq 9 \Leftrightarrow |x - 5| \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 \leq x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 + 5 \leq x - 5 + 5 \leq 9 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$$

δ) Ισχύει ότι:

$$x \geq -4 \Leftrightarrow x + 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad x \leq 14 \Leftrightarrow x - 14 \leq 0$$

Τότε:

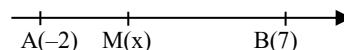
$$\begin{aligned} |x + 4| + |x - 14| &= x + 4 - (x - 14) = \\ &= x + 4 - x + 14 = 18 \end{aligned}$$

169 ΘΕΜΑ 4

α) i) $|x + 2| = |x - (-2)| = d(x, -2) = MA$

ii) $|x - 7| = d(x, 7) = MB$

β) $|x + 2| + |x - 7| = MA + MB = AB$





γ) Ισχύει ότι:

$$|x + 2| + |x - 7| = AB = \\ = d(7, -2) = |7 - (-2)| = |9| = 9$$

δ) Είναι:

$$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0, \text{ άρα } |x + 2| = x + 2.$$

Επίσης:

$$x < 7 \Leftrightarrow x - 7 < 0, \text{ άρα}$$

$$|x - 7| = -(x - 7) = 7 - x$$

Τότε:

$$A = |x + 2| + |x - 7| = x + 2 + 7 - x = 9$$

170 ΘΕΜΑ 4

α) $|x - 5| = d(x, 5) = MA$

$|x - 9| = d(x, 9) = MB$

β) i) Από την ισότητα $|x - 5| = |x - 9|$

συμπεραίνουμε ότι $MA = MB$,

δηλαδή το σημείο M είναι το μέσο του AB.

ii) Είναι:

$$AB = d(5, 9) = |5 - 9| = 4 \text{ μονάδες}$$

Επομένως το σημείο M απέχει 2 μονάδες από το σημείο A(5) και 2 μονάδες από το σημείο B(9), οπότε $x = 7$.

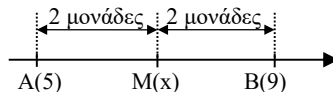
Άλγεβρικά

$$|x - 5| = |x - 9| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5 = x - 9 \text{ ή } x - 5 = -(x - 9)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0x = -4 \text{ αδύνατη ή } x - 5 = -x + 9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$



171 ΘΕΜΑ 4

α) Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $a_1 = 3$ και $\omega = 4$.

β) Είναι:

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2a_1 + (40 - 1)\omega] = \\ = 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6 + 156) = \\ = 20 \cdot 162 = 3240$$



γ) Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός v , ώστε:

$$\begin{aligned} \alpha_v = 120 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + (v-1)4 = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + 4v - 4 = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4v = 121 \Leftrightarrow v = \frac{121}{4} \end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_v = 235 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 235 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + (v-1)4 = 235 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + 4v - 4 = 235 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4v = 236 \Leftrightarrow v = 59 \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} S_{59} &= \frac{59}{2}(\alpha_1 + \alpha_{59}) = \frac{59}{2}(3 + 235) = \\ &= \frac{59}{2} \cdot 238 = \frac{14042}{2} = 7021 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$

172 ΘΕΜΑ 4

α) Το πολώνυμο: $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 2 - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 8 + 4\lambda^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 + 4\lambda^2 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$$



$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$$

ii) και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$$

γ) i) Έστω $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

ii) Είναι:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

173 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+



Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \text{ και}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

β) i) Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2$ έχει $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2 - \lambda$, $\gamma = \lambda - 2$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 2 = \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (\lambda < 2 \text{ ή } \lambda > 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

ii) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2)$$

Η εξίσωση (1) έχει ομόσημες ρίζες, αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} (\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0) &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6 \geq 0 \text{ και } 4(\lambda - 2) > 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda \leq 2 \text{ ή } \lambda \geq 3 \text{ και } \lambda > 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \geq 3 \Leftrightarrow \lambda \in [3, +\infty) \end{aligned}$$

174 ΘΕΜΑ 4

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 1 - \alpha + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = 2, \text{ ισχύει}$$

β) i) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι:

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \alpha + 2 = 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2$$

ii) Για $\alpha = 2$ οι τύποι των f, g γίνονται:

$$f(x) = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x \text{ και}$$

$$g(x) = x^2 - 2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $y = f(x)$ και $y = g(x)$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

Για να έχουν οι C_f, C_g δύο κοινά σημεία, πρέπει η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει δύο ρίζες άνισες.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

**175** ΘΕΜΑ 4

α) Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται βρίσκουμε ότι οι τεταγμένες των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην τετμημένη με τιμή 5 κυμαίνονται για τη συνάρτηση εσόδων $\varepsilon(x)$ στο 100 και για τη συνάρτηση δαπανών $\delta(x)$ στο 75.

β) i) Έστω $\delta(x) = \lambda_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση δαπανών. Η ευθεία (δ) διέρχεται από τα σημεία $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_1 = \frac{50-100}{10-0} = \frac{-50}{10} = -5$$

Τότε η ευθεία (δ) γράφεται:

$$\delta(x) = -5x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (δ) διέρχεται από το A οι συντεταγμένες του σημείου A την επαληθεύουν.

Τότε:

$$A \in (\delta) \Leftrightarrow 100 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 100$$

Τελικά η ευθεία (δ) έχει εξίσωση:

$$\delta(x) = -5x + 100$$

Έστω $\varepsilon(x) = \lambda_2 x + \beta_2$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων. Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_2 = \frac{150-50}{10-0} = \frac{100}{10} = 10$$

Τότε η ευθεία (ε) γράφεται:

$$\varepsilon(x) = 10x + \beta_2$$

Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το Γ οι συντεταγμένες του σημείου Γ την επαληθεύουν.

Τότε:

$$\Gamma \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 50 = 0 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 = 50$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon(x) = 10x + 50$$

Για $x = 5$ βρίσκουμε:

Για $x = 5$ βρίσκουμε:

$$\delta(5) = -25 + 100 = 75 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon(5) = 50 + 50 = 100$$

Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

ii) Η τετμημένη του σημείου τομής των τμημάτων AB και ΓΔ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Για $x = 10/3$ βρίσκουμε:

$$\varepsilon(10/3) = 10 \cdot 10/3 + 50 = 250/3$$

Άρα το σημείο τομής των AB και ΓΔ έχει συντεταγμένες $M(3,3, 83)$.

Επομένως 3 έτη και 3 μήνες (περίπου) μετά την έναρξη λειτουργίας της η εταιρία εμφάνισε ισοσκελισμό εσόδων και εξόδων.

Σχόλιο

Η παραπάνω εφαρμογή έχει ένα βασικό μειονέκτημα. Οι τιμές «ετήσια έσοδα» και «ετήσια έξοδα» είναι μεμονωμένες μεταβλητές και δεν μπορούν να περιγραφούν με ευθείες.

176 ΘΕΜΑ 4

α) i) Από τα δεδομένα που δίνονται για το πρόγραμμα A διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ και $\lambda = 2$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 1 \cdot 2^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 2^{v-1}$$

ii) Το πρόγραμμα B περιγράφεται από μια αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 110$, $\beta_3 = 120$ και $\omega = 10$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega \Leftrightarrow \beta_v = 100 + (v-1)10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_v = 100 + 10v - 10 \Leftrightarrow \beta_v = 90 + 10v$$

iii) Το ποσό που θα υπάρξει μετά από v μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα A θα είναι:

$$A_v = \alpha_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow A_v = 1 \cdot \frac{2^v - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow A_v = 2^v - 1$$



iv) Το ποσό που θα υπάρξει μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι:

$$B_n = \frac{v}{2}(\beta_1 + \beta_n) \Leftrightarrow B_n = \frac{v}{2}(100 + 90 + 10n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_n = \frac{v}{2}(190 + 10n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_n = \frac{190v + 10v^2}{2} \Leftrightarrow B_n = 95v + 5v^2$$

β) i) Το ποσό που θα υπάρξει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 6 μήνες:

$$A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρξει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 6 μήνες:

$$B_6 = 95 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = 570 + 180 = 750 \text{ €}$$

ii) Το ποσό που θα υπάρξει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 12 μήνες:

$$A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4.095 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρξει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 12 μήνες:

$$B_{12} = 95 \cdot 12 + 5 \cdot 12^2 = 1.140 + 720 = 1.860 \text{ €}$$

Επομένως, ακολουθώντας το πρόγραμμα Α, θα έχει συγκεντρώσει μεγαλύτερο ποσό.

177

ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$$

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
	$x^2 - x$	+	$\circ$	-	$\circ$ +

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

β) i) • $0 < \alpha^2$

$$\bullet \alpha < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$$



$$\bullet \alpha^2 < \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$$

$$\bullet \alpha < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < 1$$

Τελικά:

$$0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$$

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha}^2 < (1 + \sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$$

Ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

178 ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει:

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$$

Θέτουμε $|x| = y$ (1) και βρίσκουμε:

$$y^2 - 5y + 6$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$



Τότε:

$$\begin{aligned} y^2 - 5y + 6 &= (y - 2)(y - 3) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x^2 - 5|x| + 6 &= (|x| - 3)(|x| - 2) \end{aligned}$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 3)(|x| - 2)}{|x| - 3} = |x| - 2, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

i) Η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} (f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 8 - 5 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $|x| = z$ (2) και βρίσκουμε:

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

- $|x| = 3 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3)$, απορρίπτονται
- $|x| = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$

179

ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \end{aligned}$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \text{ και}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0 \quad (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Επομένως η ανίσωση (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

180 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \\ &= (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) i) Επειδή $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} < 0$, για $\lambda < 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι αρνητικές.



ii) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2| &\geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \right| &\geq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\lambda^2 + 1| &\geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

181**ΘΕΜΑ 4**

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \\ &= (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και} \\ P = x_1 \cdot x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 1$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

Είναι:

$$\begin{aligned} \Pi &\geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \stackrel{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) &\geq 4\lambda \stackrel{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \Pi = 4 &\Leftrightarrow 2 \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} = 4 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) = 4\lambda \stackrel{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda = 1
 \end{aligned}$$

Για $\lambda = 1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

182 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 4 - 8 + \alpha = -4 + \alpha \text{ και} \\
 g(2) &= 2\alpha - 5
 \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= g(2) \Leftrightarrow -4 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -4 + 5 = 2\alpha - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1
 \end{aligned}$$

β) Για $\alpha = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 4x + 1 \text{ και} \\
 g(x) &= x - 5
 \end{aligned}$$

i) Τότε:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0
 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$



και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$ ισχύει ότι:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

183**ΘΕΜΑ 4**

i) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x^2 - x$	+		-		+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

β) i) • $0 < 1$

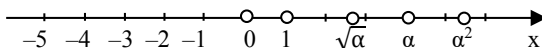
$$\bullet 1 < \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{1} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{\alpha}$$

$$\bullet 1 < \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha < \alpha^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha$$

$$\bullet 1 < \alpha \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 1 \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$$

Τελικά:

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$



ii) Ισχύει ότι:

$$\bullet \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > \alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} > \alpha$$

$$\bullet \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$$

Τελικά:

$$\alpha < \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2$$

184 ΘΕΜΑ 4

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ αν και μόνο αν:

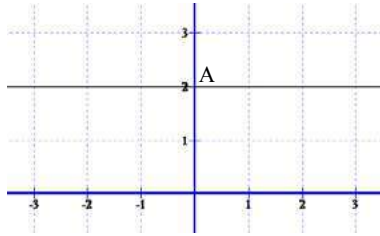
$$f(0) = 2 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2,$$

το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = -1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (-1 + 1)x^2 - (-1 + 1)x + 2 = 2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ Που διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.



γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$ και επομένως διέρχεται από αυτό αν και μόνο αν:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 2^2 - (\lambda + 1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Για $\lambda = -2$ έχουμε: $f(x) = (-2 + 1)x^2 - (-2 + 1)x + 2 = -x^2 + x + 2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο σημαίνει ότι η τεταγμένη του σημείου είναι 0.

Γνωρίζουμε ότι τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο $(2, 0)$ άρα για να βρούμε το άλλο σημείο $(\rho, 0)$ αρκεί να βρούμε την άλλη λύση ρ της εξίσωσης: $-x^2 + x + 2 = 0$. Εφόσον $S = -2$ έχουμε:

$$-2 = 2 + \rho \text{ οπότε } \rho = -4. \text{ Άρα το άλλο σημείο είναι το } (-4, 0).$$

δ) Για $\lambda = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + 1)x^2 - (1 + 1)x + 2 = \\ &= 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $a = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

185 ΘΕΜΑ 4

α) Θέτουμε: $x^2 = y$, ($y \geq 0$) οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

Το τριώνυμο $y^2 - 7y + 12$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -7$, $\gamma = 12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ \frac{7-1}{2} = 3 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

- Για $y = 4$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$$

- Για $y = 3$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3})$$

β) Θέτουμε: $x^2 = y$, ($y \geq 0$) οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0, \text{ από υπόθεση}$$

Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις οποίες συμβολίζουν y_1, y_2 .

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

- $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta}{1} = -\beta > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 είναι θετικές.
- $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{1} = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Τότε:

$$(x^2 = y_1 \text{ ή } x^2 = y_2) \Leftrightarrow (x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1} \text{ ή } x = \sqrt{y_2} \text{ ή } x = -\sqrt{y_2})$$

Τελικά η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

**186** ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$ και επομένως δεν τον τέμνει.

β) Οι τετμημένες των σημείων ης C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης:

$$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Επομένως, λόγω του ερωτήματος β, το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

187 ΘΕΜΑ 4

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f , και συγκεκριμένα στον κλάδο $x + 2$ όπου $x = 0$ και βρίσκουμε:

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0, 2)$.

β) i) • Για $x = -1$ είναι:

$$f(-1) = -(-1) + 2 = 1 + 2 = 3$$

• Για $x = -2$ είναι:

$$f(-2) = -(-2) + 2 = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία $y = -x + 2$ διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(-2, 4)$.

• Για $x = 1$ είναι:

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

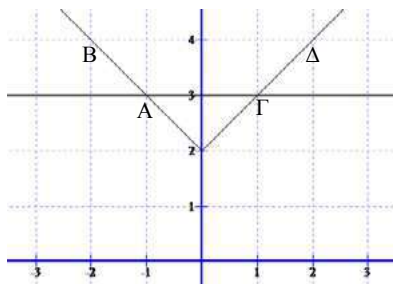
• Για $x = 2$ είναι:

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία $y = x + 2$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1, 3)$ και $\Delta(2, 4)$.

Η ευθεία $y = 3$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $E(0, 3)$.

Η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής της f με την ευθεία $y = 3$ είναι τα $A(-1, 3)$ και $\Gamma(1, 3)$.

ii) Τα σημεία A και Γ έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες. Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

γ) i) Η ευθεία $y = a$ τέμνει της C_f , όπως διαπιστώνουμε από το γράφημα, σε δύο σημεία αν και



μόνο αν $\alpha > 2$.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = |x| + 2, x \in \mathbb{R}$$

Τότε:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow |x| + 2 = \alpha \Leftrightarrow |x| = \alpha - 2 \quad (1)$$

- Αν $\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0$ η εξίσωση (1) έχει λύση την:

$$|x| = 2 - 2 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Αν $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει λύσεις τις:

$$|x| = \alpha - 2 \Leftrightarrow (x = \alpha - 2 \text{ ή } x = -(\alpha - 2)) \Leftrightarrow (x = \alpha - 2 \text{ ή } x = 2 - \alpha)$$

Επομένως επιβεβαιώνεται και αλγεβρικά το γεγονός ότι για $\alpha > 2$ έχουμε δύο λύσεις.

188 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $\alpha x^2 - 5x + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \alpha = 25 - 4\alpha^2$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha^2 \geq -25 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$$

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για $\alpha = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:



$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε γράφεται:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λύθηκε στο σκέλος (ii) και προέκυψε ότι:

$$y = 2 \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{2}$$

- Για $y = 2$ η ισότητα (1) δίνει:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 2 &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

- Για $y = \frac{1}{2}$ η ισότητα (1) δίνει:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.

189 ΘΕΜΑ 4

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \quad \text{και} \quad y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$



- Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1 - 2 = -1$
- Για $x = 4$ είναι $f(4) = 16 - 8 = 8$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων είναι τα:

$$A(1, -1) \text{ και } B(4, 8)$$

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) < g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \end{aligned}$$

Τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 5x + 4$ τις προσδιορίσαμε στο σκέλος (α).

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 4$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4)$$

γ) Κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, με $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(x) > \alpha \text{ για κάθε } \alpha < -1$$

Τότε:

$$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x - \alpha > 0$$

Η ανίσωση ισχύει διότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) = \\ &= 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0, \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha < -1$

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \alpha$, με $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

**190** ΘΕΜΑ 4

α) Η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}
 (x-2)^2 &= \lambda(4x-3) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 &= 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 4 + 3\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda &= 0
 \end{aligned}$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4(1+\lambda)$, $\gamma = 4 + 3\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 + 3\lambda) = \\
 &= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda = \\
 &= 16\lambda^2 + 20\lambda
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει ρίζες τις:

$$\begin{aligned}
 4\lambda^2 + 5\lambda = 0 &\Leftrightarrow \lambda(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\lambda = -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda = 0 \right)
 \end{aligned}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	$+\infty$	
$4\lambda^2 + 5\lambda$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned}
 4\lambda^2 + 5\lambda > 0 &\Leftrightarrow \left(\lambda < -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda > 0 \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4} \right) \cup (0, +\infty)
 \end{aligned}$$

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 S = x_1 + x_2 &= -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda) \text{ και} \\
 P = x_1 x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda
 \end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned}
 A &= (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = \\
 &= 16x_1 x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 = \\
 &= 16(4 + 3\lambda) - 12 \cdot 4(1 + \lambda) + 9 = \\
 &= 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25
 \end{aligned}$$

191 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

β) Έχουμε $5\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $20 > 0$ οπότε $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5)$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

192 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$



β) i) Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = 4$ ή $x_2 = -1$. Στο σκέλος (βi) αποδείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) άρα πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} = -1$$

Επειδή οι α, β είναι ομόσημοι η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται. Άρα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β .

193 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = \alpha_1 + (20 - 1)\omega - [\alpha_1 + (10 - 1)\omega] = \\ = \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30 \Leftrightarrow 10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Τότε:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_v = 1 + (v - 1)3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_v = 1 + 3v - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_v = 3v - 2$$

γ) Είναι:

$$\alpha_v > 30 \Leftrightarrow 3v - 2 > 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3v > 32 \Leftrightarrow v > \frac{32}{3} \cong 10,6$$



Άρα ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11ος.

δ) Ισχύει ότι:

$$a_v < 60 \Leftrightarrow 3v - 2 < 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v < 62 \Leftrightarrow v < \frac{62}{3} \cong 20,6$$

Επομένως 20 όροι είναι μικρότεροι του 60.

194 ΘΕΜΑ 4

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι $a = 1 > 0$ οπότε το τριώνυμο είναι μη αρνητικό αν και μόνο αν:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

β) i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{1}{2})$ αν και μόνο αν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 - 0 + \frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

Τότε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ή } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 0)$$

195 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1-2\lambda)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm (1-2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1+1-2\lambda}{2} = 1-\lambda \\ \frac{1-1+2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Τότε:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < |1 - 2\lambda| \text{ και } |1 - 2\lambda| < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda \neq 0 \text{ και } -2 < 1 - 2\lambda < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda \neq 1 \text{ και } -3 < -2\lambda < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

196 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή $\Delta = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Τελικά η εξίσωση έχει δύο ρίζες για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$



Τότε:

$$\begin{aligned}
 d(x_1, x_2) &= \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow d(x_1, x_2) \cdot d(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow d^2(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } 1 - \lambda = 0) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1)
 \end{aligned}$$

197 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\
 &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2
 \end{aligned}$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

γ) Για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αρκεί να ισχύει:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$, πρέπει:

$$\begin{aligned}
 \Delta &\leq 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**198** ΘΕΜΑ 4

i) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2\end{aligned}$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Το τριώνυμο έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

199 ΘΕΜΑ 4

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\lambda &= (2(-5) + 5)^2 - 8 \cdot (-5) = \\ &= (-10 + 5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 = \\ &= 25 + 40 = 65\end{aligned}$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}20 &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20 &= 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 &= 0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\lambda &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:



ii) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$4x^2 + 12x + (25 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\Delta_0 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$

200

ΘΕΜΑ 4

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\beta}{1} = \beta$$

Είναι:

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = -4 \text{ ή } \beta = 4)$$

β) Επειδή η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ισχύει ότι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma < 4$$

γ) • Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2) $|x| = y$ (3) με $y > 0$ και βρίσκουμε:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \text{ δεκτές}$$

- Για $y = 3$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$$

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

- Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \quad (5)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (5) $|x| = \omega$ (6) με $\omega > 0$ και βρίσκουμε:

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \text{ απορρίπτονται}$$

201 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow (\lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2)$$

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) την επαληθεύει, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \quad (2) \text{ προφανώς } \rho \neq 0$$



Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν:

$$\frac{1}{\rho^2} - \lambda \frac{1}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda > 0 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επειδή $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Ισχύει ότι:

$$P = x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \quad (3)$$

Τότε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \stackrel{x_1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

202

ΘΕΜΑ 4

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha \quad (1)$$

και

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha \quad (2)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - 1)(x - 2) > 0 \quad (3)$$

Είναι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Άρα $(x - 1)(x - 2) < 0$. Τότε από την (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < 0$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \gamma x^2 + \beta x + \alpha &< 0 \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (-3\alpha)x + \alpha &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) &< 0 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - 3x + 1$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 > 0 &\Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

203 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - 4 \cdot \alpha\beta \cdot \alpha\beta = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = \\ &= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 \end{aligned}$$



β) Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta \neq 0 \text{ και } \alpha + \beta \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha \neq \beta \text{ και } \alpha \neq -\beta)\end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(\alpha^2 + \beta^2)] \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2}}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} = \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}\end{aligned}$$

γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2) &\geq 4 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \stackrel{\alpha\beta > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta \frac{\alpha}{\beta} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε θετικούς αριθμούς α, β .

204

ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $3x^2 + \kappa x - 4$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = \kappa$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48$$

Επειδή ισχύει $\Delta > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{3} < 0$$

Άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $x_1 < x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1 < 0 \text{ και } x_2 > 0$$

Επίσης είναι: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, άρα:

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0 \quad (1)$$

Το πρόσημο του τριωνόμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	α	x_1	x_2	β	$+\infty$
$3x^2 + \kappa x - 4$	+		○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$f(\alpha) > 0 \text{ και } f(\beta) > 0 \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$$

205 ΘΕΜΑ 4

α) i) Αν κάποιος λείπει από το σπίτι του έχει κατανάλωση $x = 0$ κυβικά νερού. Επειδή

$0 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0,5x$ και το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(0) = 12 + 0,5 \cdot 0 = 12 \text{ ευρώ}$$

ii) Επειδή $10 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0,5x$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 10 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(10) = 12 + 0,5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17 \text{ ευρώ}$$

iii) Επειδή $50 \in (30, +\infty)$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $0,7x + 6$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 50 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(50) = 0,7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41 \text{ ευρώ}$$

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in [0, 30]$. Επειδή ο κάτοικος της



πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow 12 + 0,5x > 12 + 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12 - 12 > 0,7x - 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 > 0,1x \Leftrightarrow x < 0, \end{aligned}$$

άτοπο διότι $x \in [0, 30]$.

Επομένως ο κάτοικος της πόλης Α δεν μπορεί να καταβάλει από έως και 30 κυβικά νερού.

2^η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α καταβάλει x κυβικά νερού με $x \in (30, +\infty)$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,7x - 0,6x > 12 - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > 60 \end{aligned}$$

Επομένως, τόσο ο κάτοικος της πόλης Α όσο και της Β καταβάλει περισσότερα από 60 κυβικά νερού.

206 ΘΕΜΑ 4

α) Παρατηρώντας το σχήμα, τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ' εκτίμηση τα $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Για $x \geq 2$, είναι $|x - 2| = x - 2$ οπότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} x - 2 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4 - 2| = 2$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(4, 2)$.

2^η περίπτωση

Για $x \leq 2$, είναι $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ οπότε η (1) γράφεται:

$$2 - x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = x + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $B(1, 1)$.

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$3|2 - x| - (x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2 - x| \geq (x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2 - x| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g καθώς και τα σημεία στα οποία είναι ίσες. Από το σκέλος (γ) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

207 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda - 1$, $\gamma = \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = \\ &= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1 \end{aligned}$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:



$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(2\lambda-1) \pm \sqrt{1}}{2\lambda} = \frac{1-2\lambda \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{2-2\lambda}{2\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) Η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2 - x_1|$.

Τότε:

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| = 2 &\Leftrightarrow \left| -1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda} = -2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

208 ΘΕΜΑ 4

α) Για $a = 1$ ο τύπος της g γράφεται: $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x-1=0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1) \end{aligned}$$

- Για $x = 0$ είναι $g(0) = 0 + 1 = 1$.
- Για $x = 1$ είναι $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα:

$$A(0, 1) \text{ και } B(1, 2)$$

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει δύο λύσεις. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - a = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) =$$

$$= 1 - 4 + 4\alpha = 4\alpha - 3$$

Για να έχει λοιπόν η εξίσωση (1) δύο λύσεις πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 . Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha < 0$$

Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ετερόσημες.

209 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2 =$$

$$= (\kappa + 1 - \kappa)(\kappa + 1 + \kappa) = 2\kappa + 1 \quad (1)$$

Άρα η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται διότι πρέπει $\kappa > 1$. Άρα $\kappa = 3$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\omega = 2 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$$

ii) Έχουμε:



$$a_v = 1017 \Leftrightarrow a_1 + (v - 1)\omega = 1017 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + (v - 1)7 = 1017 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 7v - 7 = 1017 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v = 1022 \Leftrightarrow v = 511$$

Άρα ο 511ος όρος είναι ίσος με 1017.

210

ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

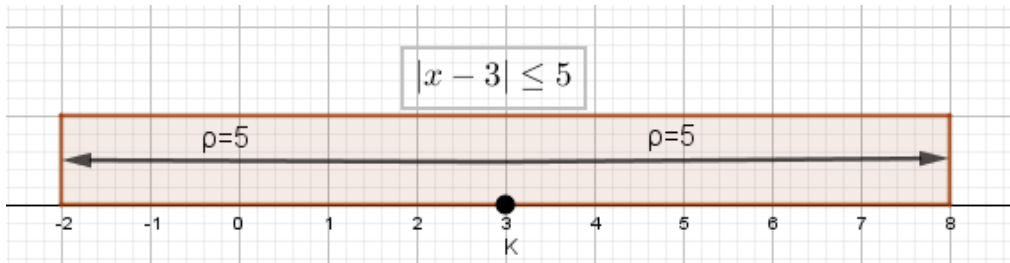
$$|x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 5 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-2, 8]$$

β) Ισχύει ότι:

Η ανίσωση $|x - 3| \leq 5$ περιγράφει το σύνολο των αριθμών x που ανήκουν σε διάστημα με κέντρο $K(3)$ και ακτίνα $\rho = 5$, δηλαδή το διάστημα $[-2, 8]$.

γ) Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $[-2, 8]$ είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

δ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$||x| - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq |x| - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 + 3 \leq |x| - 3 + 3 \leq 5 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq |x| \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 \leq |x| \text{ και } |x| \leq 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } -8 \leq x \leq 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-8, 8]$$

211

ΘΕΜΑ 4



α) Η εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0 \quad (1)$$

έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - \alpha) = \\ = 4 - 12 + 4\alpha = 4\alpha - 8$$

i) Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

ii) Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2. \text{ Τότε η διπλή ρίζα είναι: } x = -1$$

β) i) Είναι:

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{f(x) - 2} \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 2} \right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα:



$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	○	- ○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$

212 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και} \\ P = x_1 x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} \stackrel{(\gamma)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1} \leq \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$

213 ΘΕΜΑ 4



α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Είναι:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$$

Τότε:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1 - 2\lambda}{2\lambda} = \frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda} > 0$$

διότι:

$$(\lambda - 1)^2 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda > 0 \text{ από υπόθεση}$$

$$(\lambda - 1)^2 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda > 0 \text{ από υπόθεση}$$

Τελικά:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > 1$$

214 ΘΕΜΑ 4

ι) Το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 36$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = \lambda$, $\gamma = -36$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.



Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) ισχύει ότι:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2)$$

ii) α) Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

β) • Έστω ότι $\rho = 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\begin{aligned} -36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 &= 0 \Leftrightarrow -36\frac{1}{\rho^2} + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \end{aligned}$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

215 ΘΕΜΑ 4

α) Έχουμε την εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$.

Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $u^2 - 8u - 9 = 0$.

Έχουμε $\alpha=1$, $\beta=-8$ και $\gamma=-9$ οπότε Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ δεκτή} \\ \frac{8-\sqrt{100}}{2} = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ απορρίπτεται} \end{array} \right\}$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για την εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$, η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0 \quad (1).$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \text{ και}$$

$$\gamma < 0 \quad \text{άρα} \quad -\gamma > 0.$$

Συνεπώς $\Delta > 0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών της (1) είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα

οι ρίζες $u_{1,2}$ είναι ετερόσημες. Έστω $\begin{cases} u_1 < 0 \text{ απορρίπτεται} \\ u_2 > 0 \text{ δεκτή} \end{cases}$

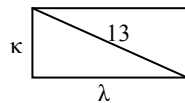
$$\text{Τότε έχουμε } x^2 = u_2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{u_2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{u_2}$$

216 ΘΕΜΑ 4

α) i) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:

$$\Pi = 34 \Leftrightarrow 2\kappa + 2\lambda = 34 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa + \lambda = 17 \Leftrightarrow \kappa = 17 - \lambda \quad (1)$$



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 13^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (17 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 289 - 34\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 34\lambda + 120 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 17\lambda + 60 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{17+7}{2} = 12 \\ \frac{17-7}{2} = 5 \end{cases}$$

• Για $\lambda = 12$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 5$.



- Για $\lambda = 5$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 12$.

Σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \kappa \cdot \lambda = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}^2$$

- ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \kappa + \lambda = 17 \text{ και } P = \kappa \cdot \lambda = 60$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

- iii) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 5 cm και 12 cm.

β) Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο με μήκη πλευρών α και β . Τότε πρέπει:

$$E_0 = 40 \Leftrightarrow \alpha\beta = 40 \quad (2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 144 \stackrel{\alpha, \beta > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - 12x + 40 = 0$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta_0 = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

217 ΘΕΜΑ 4

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $x = 400$ και βρίσκουμε:

$$y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 140 \text{ ευρώ}$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $y = 150$ και βρίσκουμε:

$$150 = 60 + 0,20 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 0,20x \Leftrightarrow x = 450 \text{ km}$$

γ) Η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρία Β αν και μόνο αν:

$$60 + 0,20x < 80 + 0,10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,20x - 0,10x < 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,10x < 20 \Leftrightarrow x < 200 \text{ km}$$

Συνεπώς η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την Β αν ο πελάτης διανύσει λιγότερα από 200 km. Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι η εταιρία Β χρεώνει λιγότερα από την Α αν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από 200 km.

δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και η g το $B = [0, +\infty)$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20x = 80 + 0,10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,20x - 0,10x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

Για $x = 200$ είναι $f(200) = 60 + 0,20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$

Άρα το σημείο τομής είναι το $A(200, 100)$.

Το σημείο τομής εκφράζει ότι αν ο πελάτης διανύσει 200 km θα πληρώσει είτε στην εταιρία Α είτε στη Β το ποσό των 100 ευρώ.

**218** ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

β) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$ (3). Τότε:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι ίδια με το σκέλος (α) οπότε έχει ρίζες τις $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$$

- Για $y = 2$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{2} \text{ ή } x = \sqrt{2})$$

γ) Επειδή το ζητούμενο τριώνυμο έχει $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο του θα είναι αυτό που δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+	○	○	+

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του με $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

Για να είναι $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x < 0$ πρέπει οι ρίζες του x_1, x_2 να είναι θετικές αφού είναι $0 < x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

2^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

3^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$$

219 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2$$

β) i) Για $\beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\Delta = -3\beta^2 < 0$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Για $\beta = 0$ είναι $\Delta = 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ αφού για $x = 0$ μηδενίζεται.

γ) Θέτουμε στο αρχικό τριώνυμο $x = \alpha$ και βρίσκουμε:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1^η

Αν $\beta \neq 0$ τότε από το σκέλος (αii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

Περίπτωση 2^η

Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$) τότε από το σκέλος (βii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

**220** ΘΕΜΑ 4

α) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$, ($y \geq 0$) (1). Τότε:

$$\begin{aligned} x^4 - 9x^2 + 20 &= 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0 \end{aligned}$$

Η νέα εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$ και ρίζες:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 \\ \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

- Για $y = 5$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{5} \text{ ή } x = \sqrt{5})$$

- Για $y = 4$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

Τελικά, η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Θέτουμε $x^2 = \omega$, ($\omega \geq 0$) οπότε η εξίσωση που θα κατασκευάσουμε θα είναι της μορφής:

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

Επειδή θέλουμε να έχει μια θετική και μια αρνητική θεωρούμε για παράδειγμα τις $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 4$. Με τη χρήση των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$S = \omega_1 + \omega_2 = -1 + 4 = 3 \text{ και}$$

$$P = \omega_1\omega_2 = (-1) \cdot 4 = -4$$

Τότε η εξίσωση είναι η:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0$$

και η αντίστοιχη διτετράγωνη, θέτοντας $x^2 = \omega$ είναι:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega = -1 \text{ ή } \omega = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = -1, \text{ αδύνατη ή } x^2 = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

221 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
x^2-2x-8	+	○	○ -	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

β) Ισχύει ότι:

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} = -\frac{8888+1}{4444} = -\left(\frac{8888}{4444} + \frac{1}{4444}\right) = -2 - \frac{1}{4444} < -2$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (i) διαπιστώνουμε ότι για $\kappa < -2$ είναι:

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

γ) Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο θέτοντας $x = |\mu|$.

Από το δεδομένο $-4 < \mu < 4$ συμπεραίνουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \leq |\mu| < 4$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (α) διαπιστώνουμε ότι για $0 \leq |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$

**222**

ΘΕΜΑ 4

α) Το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} S_X(t) &> S_A(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 + 40t &> 10t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 &< 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{4+16}{2} = 10 \\ \frac{4-16}{2} = -6 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$	-6	10	$+\infty$	
$t^2 - 4t - 60$	+		-		+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow -6 < t < 10 \Leftrightarrow t \in (-6, 10)$$

Επειδή όμως είναι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$t \in [0, 10)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 10 &\Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 + 0 &\leq 600 + 40t < 600 + 400 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 &\leq S_A(t) < 1000 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Άρα, το Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο και η χελώνα έχει διαρκώς προβάδισμα.

β) i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned}
 S_X(t) &= S_\Lambda(t) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow t = 10 \text{ min}
 \end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned}
 S_\Lambda(12) &= 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ μέτρα} \\
 S_X(12) &= 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080 \text{ μέτρα}
 \end{aligned}$$

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα}$$

iii) Αναζητούμε τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned}
 S_\Lambda(t) &= 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t^2 = 15^2 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow t = 15 \text{ min}
 \end{aligned}$$

223 ΘΕΜΑ 4

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}
 f(x) &> 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ ή } x-1 > 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3)
 \end{aligned}$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:



$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x - 1| + 2 > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $|x - 1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = |x - 1| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 1|^2 - |x - 1| - 6 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $|x - 1| = y$ (2) οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) και βρίσκουμε:

- $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow (x - 1 = -3 \text{ ή } x - 1 = 3) \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 4)$
- $|x - 1| = -2$, αδύνατη.

Αντικαθιστούμε $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(-2) = |-2 - 1| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(-2) = |-3| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(-2) = 5$$

Αντικαθιστούμε $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(4) = |4 - 1| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(4) = |3| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(4) = 5$$

Τελικά τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες:

$A(-2, 5)$ και $B(4, 5)$

224 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 3$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) = \\ &= 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda\end{aligned}$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι άνισες και θετικές αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0, S > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (48 - 4\lambda > 0, 6 > 0 \text{ και } \lambda - 3 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 12 \text{ και } \lambda > 3) \Leftrightarrow 3 < \lambda < 12, \text{ ισχύει}$$

ii) Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών x_1 , και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 - 6x + \lambda - 3$	+	○	○	+

- Επειδή $x_1 < \mu < x_2$ είναι:

$$\mu > 0, \text{ αφού } x_1, x_2 > 0$$

και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu) < 0$$

- Επίσης, αφού $x_1 > 0$ θα πρέπει το 0 να είναι αριστερά του x_1 , όπως φαίνεται στο πίνακα προσήμων. Επειδή $\kappa < 0$ από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\kappa) > 0$$

Τελικά, είναι $\kappa < 0$, $\mu > 0$, $f(\kappa) > 0$, $f(\mu) < 0$, οπότε:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$$

**225** ΘΕΜΑ 4

α) i) Το τριώνυμο $x^2 + 9x + 18$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 9$, $\gamma = 18$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-9+3}{2} = -3 \\ \frac{-9-3}{2} = -6 \end{cases}$$

ii) Επειδή $|x + 3| \geq 0$ και $|x^2 + 9x + 18| \geq 0$ ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} |x + 3| + |x^2 + 9x + 18| &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (|x + 3| = 0 \text{ και } |x^2 + 9x + 18| = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 3 = 0 \text{ και } x^2 + 9x + 18 = 0) &\stackrel{(ai)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow (x = -3 \text{ και } x = -3 \text{ ή } x = -6) &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

β) i) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-6	-3	$+\infty$
$x^2 + 9x + 18$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

$$x^2 + 9x + 18 > 0 \Leftrightarrow (x < -6 \text{ ή } x > -3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty)$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned} |x^2 + 9x + 18| &= -x^2 - 9x - 18 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x^2 + 9x + 18| &= -(x^2 + 9x + 18) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 &< 0 \stackrel{(βii)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow -6 < x < -3 &\Leftrightarrow x \in (-6, -3) \end{aligned}$$

226 ΘΕΜΑ 4

α) Το πλήθος των μαθητών είναι:

$$x(x - 1) \text{ ή } (x + 3)(x - 3) - 1$$

Πρέπει:

$$x(x-1) = (x+3)(x-3) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = -9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο $x(x-1)$ όπου $x = 10$ και βρίσκουμε:

$$10(10-1) = 10 \cdot 9 = 90 \text{ μαθητές}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 2$, $\omega = 2$ και $S_v = 90$. Τότε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = \frac{v}{2}(4 + 2v - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 2v + v^2 - v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + v - 90 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 > 0$$

και ρίζες τις:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η τιμή $v = -10$ απορρίπτεται διότι $v \in \mathbb{N}$. Άρα θα δημιουργηθούν $v = 9$ ομάδες εργασίας.

227 ΘΕΜΑ 4

α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

είναι τα σημεία τομής των C_f , C_g . Από τη γραφική παράσταση των f , g διαπιστώνουμε ότι τα ζητούμενα x είναι τα:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, \text{ και } x_3 = 1$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι:



$$f(-1) = 4, f(0) = 2 \text{ και } f(1) = 0$$

γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν:

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

δ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

228 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x - 1$ έχει $\alpha = 1, \beta = -5\lambda, \gamma = -1$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

i) Τότε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 \text{ και } P = x_1 x_2 = -1$$

Τότε:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 =$$



$$\begin{aligned}
 &= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 = \\
 &= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16
 \end{aligned}$$

229 ΘΕΜΑ 4

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = \\
 &= 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

ii) Το εμβαδόν είναι:

$$E = x_1 x_2 = 16$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi &\geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

β) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda = 1
 \end{aligned}$$



Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το οποίο σημαίνει ότι $x_1 = x_2 = 4$ κι επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

230 ΘΕΜΑ 4

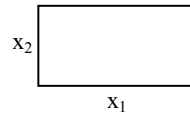
α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(2-\lambda)}{1} = \lambda(2-\lambda)$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$$



ii) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1 x_2 = \lambda(2-\lambda)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E \leq 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Είναι:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $x_1 = x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $x_1 = x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

231 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{5+7}{2} = 6 \\ \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$$

Ο αριθμός Κ προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = -\frac{46}{47}$.

Ο αριθμός $-\frac{46}{47}$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 6)$ όπου η παράσταση Κ είναι αρνητική. Άρα:

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6 < 0$$

iii) Η παράσταση:

$$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = |\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6$$

προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = |\alpha|$. Ισχύει ότι:

$$\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow |a| < 6 \Leftrightarrow 0 \leq |a| < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a| \in [0, 6) \subset (-1, 6)$$

Στο διάστημα αυτό, όπως διαπιστώνουμε από τον πίνακα προσήμων, το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα:

$$\Delta < 0$$

232

ΘΕΜΑ 4

α) Ισχύει ότι:

$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

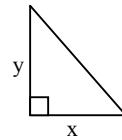
Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$$

Άρα $0 < x < 10 \Leftrightarrow x \in (0, 10)$.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκη πλευρών x και y υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2}xy \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2), x \in (0, 10) \end{aligned}$$



β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 \leq 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (0, 10) \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Επομένως για $x = 5$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x = 5$ η σχέση (1) δίνει: $y = 10 - 5 = 5$. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

233 ΘΕΜΑ 4

α) i) • Για απόσταση $x = 0$ km, δηλαδή μόλις ο πελάτης μπει στο ταξί, η χρέωση είναι 1 ευρώ.

- Για απόσταση $x = 2$ km, ο πελάτης θα πληρώσει $2 \cdot 0,6 = 1,2$ ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 2,2 ευρώ.
- Για απόσταση $x = 8$ km, ο πελάτης θα πληρώσει $8 \cdot 0,6 = 4,8$ ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 5,8 ευρώ.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) • Αφού ο πελάτης πλήρωσε 2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης απλά μπήκε στο ταξί χωρίς να διανύσει χιλιόμετρα. Άρα $x = 0$ km.

- Αφού ο πελάτης πλήρωσε 3,2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε $3,2 - 2 = 1,2$ ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε $1,2 : 0,4 = 3$ χιλιόμετρα.
- Αφού ο πελάτης πλήρωσε 4,8 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε $4,8 - 2 = 2,8$ ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε $2,8 : 0,4 = 7$ χιλιόμετρα.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8



β) Επειδή οι τιμές που αναγράφονται στο πρόβλημα ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα ισχύει ότι το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = A_g = [0, 15)$$

Προσδιορισμός της f

Ο πελάτης πληρώνει 0,6 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει $0,6 \cdot x$ ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 1 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = 1 + 0,6x, \quad x \in [0, 15)$$

Προσδιορισμός της g

Ο πελάτης πληρώνει 0,4 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει $0,4 \cdot x$ ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 2 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της g είναι:

$$g(x) = 2 + 0,4x, \quad x \in [0, 15)$$

γ) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f:

- $x = 0$ και βρίσκουμε $f(0) = 1 + 0,6 \cdot 0 = 1$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $f(5) = 1 + 0,6 \cdot 5 = 4$

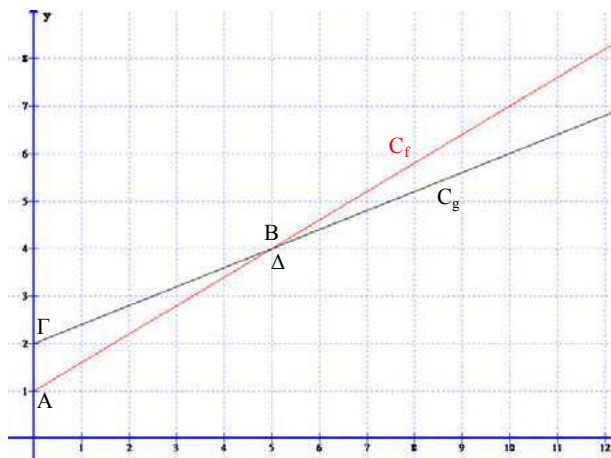
Άρα η γραφική παράσταση της f που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία A(0, 1) και B(5, 4).

Αντικαθιστούμε στον τύπο της g:

- $x = 0$ και βρίσκουμε $g(0) = 2 + 0,4 \cdot 0 = 2$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $g(5) = 2 + 0,4 \cdot 5 = 4$

Άρα η γραφική παράσταση της g που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Γ(0, 2) και Δ(5, 4).

Οι γραφικές παραστάσεις των f, g είναι:



Η εταιρεία RED είναι οικονομικότερη από τη YELLOW για το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στο διάστημα $[0, 5)$.

- δ) Αν ο πελάτης B διανύσει x χιλιόμετρα τότε ο πελάτης A θα διανύσει $x + 3$ χιλιόμετρα.

Επομένως ο πελάτης B θα πληρώσει:

$$B = 1 + 0,6x$$

και ο πελάτης A θα πληρώσει:

$$A = 1 + 0,6(x + 3) = 1 + 0,6x + 0,6 \cdot 3 = B + 1,8$$

Τελικά ο πελάτης A θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη B.

γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στο διάστημα $[0, 5)$.

- δ) Αν ο πελάτης B διανύσει x χιλιόμετρα τότε ο πελάτης A θα διανύσει $x + 3$ χιλιόμετρα.

Επομένως ο πελάτης B θα πληρώσει:

$$B = 1 + 0,6x$$

και ο πελάτης A θα πληρώσει:

$$A = 1 + 0,6(x + 3) = 1 + 0,6x + 0,6 \cdot 3 = B + 1,8$$

Τελικά ο πελάτης A θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη B.



α) Είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_{\Lambda\Theta\text{MK}} + E_{\text{MΖΓΗ}} = \Lambda\Theta^2 + \Gamma\text{Η}^2 = \\ &= x^2 + (3 - x)^2 = \\ &= x^2 + 9 - 6x + x^2 = \\ &= 2x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E &\geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0, 3)$

γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Για $x = \frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του AB , οπότε και το M μέσο του AG .

235 ΘΕΜΑ 4

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \stackrel{E \neq 0}{\Leftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha \beta = 1$$

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α, β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5 + 2\sqrt{6}$ και $5 - 2\sqrt{6}$.

236 ΘΕΜΑ 4

α) Οι αριθμοί 2, x , 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{2+8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = x - 2 = 5 - 2 = 3$$

β) Οι αριθμοί 2, x , 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) i) Η αριθμητική πρόοδος (a_n) έχει $a_1 = 2$ και $\omega = 3$. Τότε:



$$\begin{aligned}
 S_v &= \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)3] \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}(4 + 3v - 3) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}(1 + 3v) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_v &= \frac{v+3v^2}{2}
 \end{aligned}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_v) έχει $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$. Είναι:

$$\beta_7 = \beta_1 \lambda^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 2(S_v + 24) &= \beta_7 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\left(\frac{v+3v^2}{2} + 24\right) &= 128 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 3v^2 + v + 48 &= 128 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 3v^2 + v - 80 &= 0
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 > 0$$

και ρίζες τις

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 31}{6} = \begin{cases} \frac{-1+31}{6} = 5 \\ \frac{-1-31}{6} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Η λύση $v = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι φυσικός αριθμός. Τελικά $v = 5$.

237 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 7$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda \geq -64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$



β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-7}{1} = \lambda - 7$$

ii) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες και ομόσημες ρίζες αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (64 - 4\lambda > 0 \text{ και } \lambda - 7 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4\lambda > -64 \text{ και } \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 16 \text{ και } \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < \lambda < 16$$

Επειδή $S = 6 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στη (2) $|x| = y$ και έχουμε:

$$y^2 - 6y + \lambda - 7 = 0 \quad (3)$$

Επομένως για να έχει η εξίσωση (2) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες αρκεί η εξίσωση (3) να έχει δύο θετικές άνισες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Από το σκέλος (iiβ) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$7 < \lambda < 16$$

ii) Ισχύει ότι:

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{90} < \sqrt{256}, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Τελικά για $\lambda = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση (2) οπότε και η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

238 ΘΕΜΑ 4

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο $y = 0,43x - 26$ όπου $y = 38,5$ και βρίσκουμε:

$$38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64,5 = 0,43x \Leftrightarrow x = 150$$

Άρα η γυναίκα έχει ύψος 150 cm.



β) Αν υποθέσουμε ότι το μηριαίο οστό με μήκος $y = 42,8$ cm ανήκει σε άνθρωπο με ύψος $x = 164$ cm, τότε θα πρέπει να επαληθεύεται η ισότητα $y = 0,45x - 31$.

Είναι:

$$42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8, \text{ ισχύει}$$

γ) Ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους αν και μόνο αν:

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 31 - 26 = 0,45x - 0,43x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250 \text{ cm}$$

Είναι φυσικώς αδύνατον ένας άνδρας και μια γυναίκα να έχουν ύψος 250 cm! Δεν μπορεί επομένως ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους

239 ΘΕΜΑ 4

α) Οι αριθμοί $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 + x = \frac{x^2 + 5 + 2x + 4}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + x) = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3)$$

β) Για $x = 3$ είναι:

$$\alpha_4 = 3^2 + 5 = 14 \text{ και} \\ \alpha_5 = 3^2 + 3 = 12.$$

i) Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4 - 1)\omega = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 + 3(-2) = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} S &= \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \dots + \alpha_{24} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{14}) = \\ &= S_{24} - S_{14} = \\ &= \frac{24}{2}[2 \cdot 20 + (24 - 1) \cdot (-2)] - \frac{14}{2}[2 \cdot 20 + (14 - 1) \cdot (-2)] = \\ &= 12(40 - 46) - 7(40 - 26) = -72 - 98 = -170 \end{aligned}$$

240 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3 - 1)\omega = 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega &= 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8 - 2\omega \quad (1) \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 23 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega &= 23 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 8 - 2\omega + 7\omega &= 23 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5\omega &= 15 \Leftrightarrow \omega = 3 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 8 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \alpha_1 + (31 - 1)\omega = \\ &= 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92 \end{aligned}$$

γ) Έχουμε:

$$\begin{aligned} S &= (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 31) = S_1 + S_2 \end{aligned}$$

όπου

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31} = \frac{31}{2}[2 \cdot 2 + (31 - 1) \cdot 3] = \frac{31}{2}(4 + 30 \cdot 3) = \frac{31}{2} \cdot 94 = 1457$$



$$S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 31 = \frac{31}{2}(1 + 31) = \frac{31}{2} \cdot 32 = 496$$

Τελικά:

$$S = 1497 + 496 = 1953$$

241 ΘΕΜΑ 4

α) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |s_{\Delta} - s_A| &= |s_{\Delta} - s_B| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (s_{\Delta} - s_A = s_{\Delta} - s_B \text{ ή } s_{\Delta} - s_A &= -(s_{\Delta} - s_B)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (s_A = s_B, \text{απορρίπτεται ή } s_{\Delta} - s_A &= -s_{\Delta} + s_B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2s_{\Delta} = s_A + s_B \Leftrightarrow s_{\Delta} &= \frac{s_A + s_B}{2} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} s_A - s_{\Delta} &= s_A - \frac{s_A + s_B}{2} = \\ &= \frac{2s_A - s_A - s_B}{2} = \frac{s_A - s_B}{2} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s_A &< s_{\Delta} \quad (1) \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης ότι:

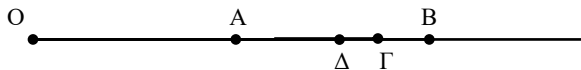
$$\begin{aligned} s_{\Delta} - s_{\Gamma} &= \frac{s_A + s_B}{2} - \frac{s_A + 3s_B}{4} = \\ &= \frac{2s_A + 2s_B - s_A - 3s_B}{4} = \frac{s_A - s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s_{\Delta} &< s_{\Gamma} \quad (2) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} s_{\Gamma} - s_B &= \frac{s_A + 3s_B}{4} - s_B = \\ &= \frac{s_A + 3s_B - 4s_B}{4} = \frac{s_A - s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s_{\Gamma} &< s_B \quad (3) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$s_A < s_{\Delta} < s_{\Gamma} < s_B$$



β) i) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (s_A + s_B)x + s_A s_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1,4x + 0,45 = 0 \quad (4)$$

ii) Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 = 0,16$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1,4) \pm \sqrt{0,16}}{2 \cdot 1} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2} = \begin{cases} \frac{1,4+0,4}{2} = 0,9 \\ \frac{1,4-0,4}{2} = 0,5 \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $s_A < s_B$ είναι:

$$s_A = 0,5 \text{ km} \text{ και } s_B = 0,9 \text{ km}$$

Τέλος βρίσκουμε:

$$s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{0,5 + 3 \cdot 0,9}{4} = 0,8 \text{ km}$$

$$s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2} = \frac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7 \text{ km}$$

242 ΘΕΜΑ 4

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ABΓΔ είναι:

$$E_1 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2$$

Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15 + 2x$, $25 + 2x$ και εμβαδόν:

$$\begin{aligned} E_2 &= (15 + 2x)(25 + 2x) = \\ &= 375 + 30x + 50x + 4x^2 = \\ &= 4x^2 + 80x + 375 \end{aligned}$$



β) Ισχύει ότι:

$$E = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5$ m.

γ) Είναι:

$$E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$				0	5			
	$+\infty$								
$x^2 + 20x - 125$							-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (0, 5)$$

243

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω ότι το πλάτος του παραλληλογράμμου είναι y cm. Τότε η περίμετρός του είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Είναι:

$$\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι διαστάσεις πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 20 - x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x > -20 \Leftrightarrow x < 20$$

Τελικά:

$$0 < x < 20$$

β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = x \cdot y \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \quad x \in (0, 20)$$

γ) Είναι:

$$E(x) \leq 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το ερώτημα (γ) η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι 100 cm^2 . Άρα:

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

και $y = 20 - 10 = 10$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 40 cm το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

244 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3 - 1)\omega = 10 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + (20 - 1)\omega = 61 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_v = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + (v - 1)3 = 333 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 3v - 3 = 333 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v = 332 \Leftrightarrow v = \frac{332}{3}$$

Ο αριθμός $\frac{332}{3}$ δεν είναι φυσικός και επομένως ο 333 δεν μπορεί να είναι όρος τη αριθμητικής προόδου.

γ) Έστω ότι οι x, y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $x < y$. Τότε ισχύει ότι:

$$y = \omega + x \quad (2)$$

Είναι:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} = \frac{\omega + x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2(\omega + x) \Leftrightarrow 3x = 2\omega + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\omega \Leftrightarrow x = 6$$

Ο αριθμός 6 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου αφού θα έπρεπε να υπάρχει φυσικός αριθμός v ώστε να ισχύει:

$$\alpha_v = 6 \Leftrightarrow 4 + (v - 1)3 = 6 \Leftrightarrow 3v = 5 \Leftrightarrow v = \frac{5}{3}, \text{ που δεν είναι φυσικός αριθμός.}$$

**245** ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda$$

Η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad (1)$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0, \text{ απορρίπτεται λόγω του } (\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \quad (2)$$

ii) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Επίσης, από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

**246** ΘΕΜΑ 4

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha$ είναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\alpha^2 - 1))^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) = \\ &= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2\end{aligned}$$

β) Είναι $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\alpha^2 - 1)) \pm \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2}}{2 \cdot \alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm (\alpha^2 + 1)}{2\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \\ \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned}|p_1 - p_2| &= 2 \Leftrightarrow \left| \alpha - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \right| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \text{ ή } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1 = -2\alpha \text{ ή } \alpha^2 + 1 = 2\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((\alpha + 1)^2 = 0 \text{ ή } (\alpha - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha - 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha = -1 \text{ ή } \alpha = 1)\end{aligned}$$

247 ΘΕΜΑ 4

α) Το μηνιαίο κόστος της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ είναι:

$$K(v) = 6500 + 15 \cdot v, v \in \mathbb{N}$$

β) Τα μηνιαία έσοδα της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ είναι:

$$E(v) = 25 \cdot v, v \in \mathbb{N}$$

γ)

ι) Η επιχείρηση δεν έχει ζημία αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}E(v) &\geq K(v) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 25v \geq 6500 + 15v \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 10v \geq 6500 \Leftrightarrow v \geq 650$$

Επομένως η επιχείρηση πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 650 τόներ το μήνα ώστε να μην έχει ζημιά.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} P(v) &= E(v) - K(v) = \\ &= 25v - 6500 - 15v = \\ &= 10v - 6500. \end{aligned}$$

Η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν και μόνο αν:

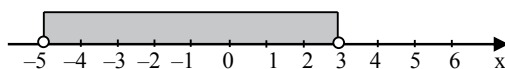
$$\begin{aligned} P(v) &\geq 500 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10v - 6500 &\geq 500 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10v &\geq 7000 \Leftrightarrow v \geq 700 \end{aligned}$$

Επομένως η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν πουλήσει τουλάχιστον 700 τόներ.

247 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x + 1| < 4 &\Leftrightarrow -4 < x + 1 < 4 \Leftrightarrow -4 - 1 < x + 1 - 1 < 4 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-5, 3) \end{aligned}$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $(-5, 3)$ είναι οι:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \leq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $a = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Αν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+		-	+

Επειδή θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2 . Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί 1 και 2.

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

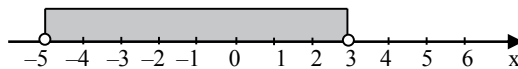
Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 3x + 2$$

248 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x + 1| < 4 &\Leftrightarrow -4 < x + 1 < 4 \Leftrightarrow -4 - 1 < x + 1 - 1 < 4 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-5, 3) \end{aligned}$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $(-5, 3)$ είναι οι:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \leq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Αν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+		-	+

Επειδή θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2 . Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει

να ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί 1 και 2.

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

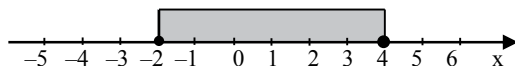
$$x^2 - Sx + P = x^2 - 3x + 2$$

249 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$|x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $[-2, 4]$ είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $a = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+	○	○	+

Επειδή θέλουμε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2 . Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0, +\infty)$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί -2 και -1 .

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -2 + (-1) = -3 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = (-2) \cdot (-1) = 2$$



Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 + 3x + 2.$$

250 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-x^2+2x+8$	-	○	+	○	-

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$-x^2 + 2x + 8 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

$$-x^2 + 2x + 8 < 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

β) Ο αριθμός 2,999 ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου το τριώνυμο είναι θετικό. Άρα:

$$f(2,999) > 0$$

Ο αριθμός $-1,002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1,002) < 0$$

Επομένως είναι:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002) < 0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x = |\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|) = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

Επειδή είναι:

$$-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 3$$

ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|) > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$$

Ο αριθμός $-1,002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1,002) < 0$$

Επομένως είναι:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002) < 0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x = |\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|) = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

Επειδή είναι:

$$-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 3$$

ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|) > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$$

251 ΘΕΜΑ 4

α) i) Από τη γραφική παράσταση που δίνεται εκτιμούμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

ii) Η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \Leftrightarrow (x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 1)$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$ και για $x = 3$ είναι $f(3) = |3 - 2| = 1$

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

Επίσης, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, άρα η C_f είναι

κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

γ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$(1 - f(x)) \geq 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \Leftrightarrow (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0)$$

Αναζητούμε επομένως τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω



από τη γραφική παράσταση της g , τα σημεία τομής της f με την g καθώς και τα σημεία στα οποία η f τέμνει τον άξονα $x'x$ ώστε να τα απορρίψουμε. Από τη δοθείσα γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν:

$$x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

Σχόλιο

Το σκέλος (γ) θα μπορούσε να λυθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$\begin{aligned} (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (|x - 2| \leq 1 \text{ και } |x - 2| \neq 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1 \leq x - 2 \leq 1 \text{ και } x - 2 \neq 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 \leq x \leq 3 \text{ και } x \neq 2) &\Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, 3] \end{aligned}$$

252 ΘΕΜΑ 4

α) Επειδή $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, θα ισχύει:

$$(\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0) \text{ ή } (\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0)$$

1^η περίπτωση

$$\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ και } 1 > \beta \Leftrightarrow \beta < 1 < \alpha$$

2^η περίπτωση

$$\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ και } 1 < \beta \Leftrightarrow \alpha < 1 < \beta$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Αλγεβρικά

- Αν $\beta < 1 < \alpha$, τότε:

$$\begin{cases} \beta < 1 \\ 1 < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 - \beta \\ 0 < \alpha - 1, \\ \beta - \alpha < 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= \alpha - 1, \quad |1 - \beta| = 1 - \beta \text{ και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow -(\beta - \alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= \alpha - 1 + 1 - \beta = \alpha - \beta \stackrel{(1)}{=} 4 \end{aligned}$$



- Αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε:

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ 1 < \beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 < 0 \\ 1 - \beta < 0, \\ 0 < \beta - \alpha \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= -(\alpha - 1) = 1 - \alpha, \\ |1 - \beta| &= -(1 - \beta) = \beta - 1 \quad \text{και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha \stackrel{(2)}{=} 4$$

Γεωμετρικά

Έστω $A(\alpha)$, $B(\beta)$ και $\Gamma(1)$ όπου το Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B . Τότε:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= d(\alpha, 1) + d(1, \beta) = \\ &= A\Gamma + \Gamma B = \\ &= AB = d(\alpha, \beta) = \\ &= |\beta - \alpha| = 4 \end{aligned}$$

253 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -14$, $\gamma = 8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{14+10}{6} = 4 \\ \frac{14-10}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το τριώνυμο $8x^2 - 14x + 3$ έχει $\alpha = 8$, $\beta = -14$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{14+10}{16} = \frac{3}{2} \\ \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο



αν ισχύει:

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \quad (5)$$

i) Έστω ότι $\rho = 0$, τότε:

$$(5) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4) αν και μόνο αν:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma\frac{1}{\rho^2} + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \stackrel{\rho \neq 0}{\Leftrightarrow} \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

που ισχύει λόγω της ισότητας (5).

254 ΘΕΜΑ 4

α) Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	+		-		+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

β) i) Επειδή είναι $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$ οι $\kappa - 1$, $\lambda - 1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις

περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$(\lambda - 1 > 0 \text{ και } \kappa - 1 < 0) \Leftrightarrow (\lambda > 1 \text{ και } \kappa < 1) \Leftrightarrow \kappa < 1 < \lambda$$

2^η περίπτωση

$$(\lambda - 1 < 0 \text{ και } \kappa - 1 > 0) \Leftrightarrow (\lambda < 1 \text{ και } \kappa > 1) \Leftrightarrow \lambda < 1 < \kappa$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ .

ii) Αφού οι κ, λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ισχύει ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ τότε θα είναι:

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2 \text{ ή } \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$\left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2 \right) \Leftrightarrow \left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } -\lambda \leq -2 \right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \leq \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2}$$

2^η περίπτωση

$$\left(\lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2 \right) \Leftrightarrow \left(-\lambda \geq -\frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2 \right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \geq -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}$$

Τελικά, και από τις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε:

$$\left(\kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2} \text{ ή } \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow |\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$$

**255** ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow \alpha \in (1, 3)$$

β) i) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 3$$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 4\alpha + 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$\alpha^2 - 4\alpha + 3$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0, \text{ για κάθε } \alpha \in (1, 3)$$

ii) Αφού το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει $\Delta < 0$ θα έχει πρόσημο το ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του 1 > 0. Άρα:

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το σκέλος (βi) μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Επειδή $\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = (\alpha - 2)^2 - 1$ ισχύει ότι:

$$0 < |\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow 0 < |\alpha - 2|^2 < 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < (\alpha - 2)^2 - 1 < 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

256 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{3-1} = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 = 4 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{5-1} = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^4 = 16 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_1 \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} = \frac{\frac{1}{\alpha_{v+1}}}{\frac{1}{\alpha_v}} = \frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^{v-1}}{\alpha_1 \lambda^{v+1-1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^{v-1}}{\alpha_1 \lambda^v} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο $\lambda' = \frac{1}{2}$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \alpha_1 \frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = \\ &= 2^{10} - 1 \quad (3) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S'_{10} &= \beta_1 \frac{(\lambda')^{10}-1}{\lambda'-1} = \\ &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2(2^{10}-1)}{2^{10}} = \\ &= \frac{2^{10}-1}{2^9} = \frac{1}{2^9} (2^{10} - 1) = \\ &= \frac{1}{2^9} S_{10}, \end{aligned}$$

λόγω της (3).

**257****ΘΕΜΑ 4**

α) Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
x^2+x-6	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$$

β) Είναι:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} < -1 \text{ ή } x - \frac{1}{2} > 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < -1 + \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1 + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha, \alpha > 0$$

Τότε:

$$E < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} -3 < \alpha < 2$$

Επειδή όμως είναι $\alpha > 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$0 < \alpha < 2 \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| > 1 \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \left(\alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > \frac{3}{2} \right) \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha > \frac{3}{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

ii) Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι:

$$\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 2\alpha + 2\alpha + 2 = 4\alpha + 2$$

Τότε από το σκέλος (γί) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} < 4 \cdot \alpha < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2 < 4\alpha + 2 < 8 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 < \Pi < 10$$

258 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$|x - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \Leftrightarrow -2 + 4 < x - 4 + 4 < 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (2, 6)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$d(x, 4) < 2 \Leftrightarrow |x - 4| < 2 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 4 < 3x - 4 < 18 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14$$

Άρα $3x - 4 > 0$ (1).

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$2 < d(3x, 4) < 14 \Leftrightarrow 2 < |3x - 4| < 14 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 14 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 6,$$



β) i) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}d(x, 4) < 2 &\Leftrightarrow |x - 4| < 2 \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \\&\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 6 - 4 < 3x - 4 < 18 - 4 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14\end{aligned}$$

Άρα $3x - 4 > 0$ (1).

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}2 < d(3x, 4) < 14 &\Leftrightarrow 2 < |3x - 4| < 14 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\&\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 14 + 4 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2 < x < 6,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από σκέλος (α).

ii) Θέλουμε να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$d(3x, 19) = |3x - 19|$$

Από το σκέλος (α) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}2 < x < 6 &\Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 6 - 19 < 3x - 19 < 18 - 19 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1 \quad (2)\end{aligned}$$

Άρα $3x - 19 < 0$. Τότε:

$$d(3x, 19) = |3x - 19| = -(3x - 19) = -3x + 19$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (2) με -1 και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}-13 < 3x - 19 < -1 &\Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -13 \cdot (-1) > (3x - 19) \cdot (-1) > -1 \cdot (-1) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 13 > -3x + 19 > 1 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 < -3x + 19 < 13 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 < d(3x, 19) < 13\end{aligned}$$

259 ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

β) Επειδή είναι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$ οι $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.

Από την απάντηση του ερωτήματος (α), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha < 1 \text{ ή } \alpha > 2 \text{ και } 1 < \beta < 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 < 0 \text{ και } \beta - 2 < 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\alpha > 2$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \beta < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

2^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (1 < \alpha < 2 \text{ και } \beta < 1 \text{ ή } \beta > 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 > 0 \text{ και } \beta - 2 > 0)$$



Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\beta < 1$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \alpha < \beta$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει ότι:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

260

ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει:

$$|2 - x| \neq 0 \Leftrightarrow 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Είναι:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{|2 - x|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Για $x > 2$ είναι: $|2 - x| = -(2 - x) = x - 2$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3$$

2^η περίπτωση

Για $x < 2$ είναι: $|2 - x| = 2 - x = -(x - 2)$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x-3) = -x + 3$$

Τελικά έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$$

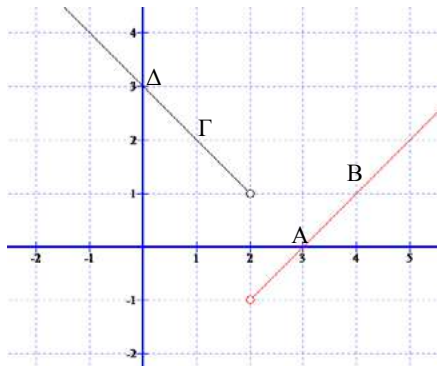
γ) Για $x = 3$ είναι $f(3) = 0$ και για $x = 4$ είναι $f(4) = 1$.

Επομένως η ευθεία $y = x - 3$ διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(4, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 2$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 3$.

Επομένως η ευθεία $y = 3 - x$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(0, 3)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 3) \stackrel{x \neq 2}{\Leftrightarrow} x = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0^2 - 5 \cdot 0 + 6}{|2 - 0|} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 3)$.

δ) Αναζητούμε τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τον



άξονα $x'x$ καθώς και τα σημεία τομής της f με τον άξονα $x'x$. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$x \in (2, 3]$$

Σχόλιο

Προφανώς, τα σημεία τομής με τους άξονες θα μπορούσαμε να τα συμπεράνουμε από τη γραφική παράσταση της f χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις.

261 ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει:

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha$. Είναι:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha &= \\ &= 4x^2 - 2\alpha x - 6x + 3\alpha = \\ &= 2x(2x - 3) - \alpha(2x - 3) = \\ &= (2x - 3)(2x - \alpha) \end{aligned}$$

Τότε ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3} = \frac{(2\alpha - 3)(2x - \alpha)}{2x - 3} = 2x - \alpha$$

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

δ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}, \text{ με } x \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3 \end{aligned}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha \neq 3$.

Αν $\alpha = 3$ η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \alpha = -\alpha$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -\alpha)$.

262 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 &(1) \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |\beta - 3| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 + 3 \leq \beta - 3 + 3 \leq 2 + 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5 &(2) \end{aligned}$$

γ) Από το σκέλος (α) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 < \alpha < 3 &\Leftrightarrow 2 \cdot 1 < 2\alpha < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6 &(3) \end{aligned}$$

Από το σκέλος (β) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 \leq \beta \leq 5 &\Leftrightarrow -3 \cdot 1 \geq -3\beta \geq -3 \cdot 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3 &(4) \end{aligned}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 2 - 15 < 2\alpha - 3\beta < 6 - 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -13 < 2\alpha - 3\beta < 3 \end{aligned}$$

δ) Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 \leq \beta \leq 5 &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 &(5) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (5) και βρίσκουμε:

$$1 \cdot \frac{1}{5} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 3 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$$

263 ΘΕΜΑ 4

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} g(1) = -4 &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + \mu}{1+1} = -4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2} = -4 &\Leftrightarrow -2 + \mu = -8 \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \mu = -6$$

β) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$ με:

$$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

γ) Για $\mu = -6$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x + 1}$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$.

Το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{4 \pm 8}{4} = \begin{cases} \frac{4+8}{4} = 3 \\ \frac{4-8}{4} = -1 \end{cases}$$

Άρα:

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x - (-1)) = 2(x - 3)(x + 1)$$

Τότε, μετά από τις σχετικές πράξεις και απλοποιήσεις ο τύπος της g γράφεται:

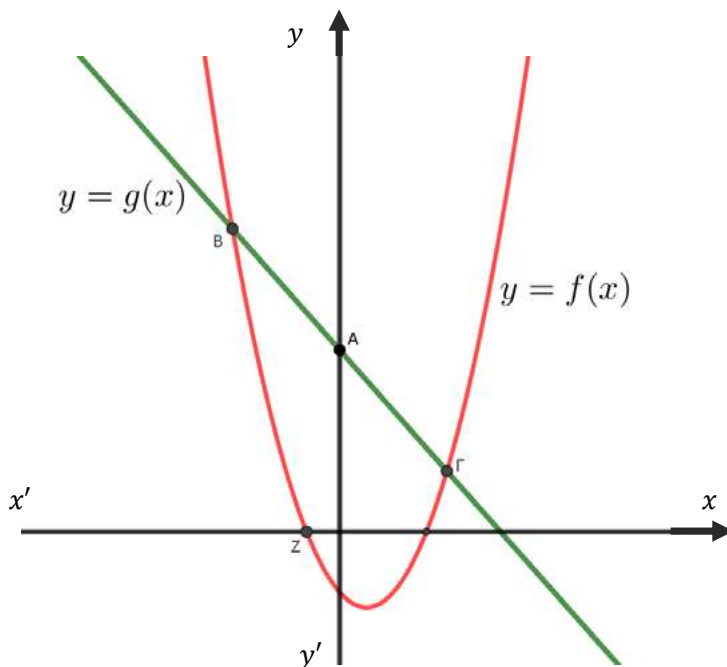
$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2(x-3)(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2(x - 3) = 2x - 6, \text{ με } x \neq -1$$

264 ΘΕΜΑ 4

ΛΥΣΗ



α) Το σημείο Z έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία γράφεται $x^2 - x - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$.

Άρα $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, αφού $1 < 5 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{5} \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$.

Η άλλη ρίζα είναι η $x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Όστε $Z\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

Το σημείο A έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $g(0) = 3 - 0 = 3$, έτσι $A(0, 3)$.

Τα σημεία B και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 3 - x$ η οποία γράφεται $x^2 = 4$. Οπότε $x^2 = 2^2$, άρα $x = 2$ ή $x = -2$.

Οι τεταγμένες των σημείων Γ και B θα είναι:

$f(2) = g(2) = 3 - 2 = 1$ και $f(-2) = g(-2) = 3 - (-2) = 5$ αντίστοιχα.

Όστε $B(-2, 5)$, $\Gamma(2, 1)$ αφού το σημείο B βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.



β) Πρέπει $f(x) > g(x)$, δηλαδή $x^2 - x - 1 > 3 - x$, οπότε $\Leftrightarrow x^2 > 4$, σχέση που γράφεται $x^2 > 2^2$, άρα $|x| > |2|$. Όστε $x < -2$ ή $x > 2$.

Έτσι, για $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ θα είναι $f(x) > g(x)$.

γ) Προφανώς πρέπει να αποδείξουμε ότι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| \geq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό α . Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$$|f(\alpha) + g(\alpha)| \geq 1, \text{ άρα } |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| \geq 1, \text{ δηλαδή } |\alpha^2 - 2\alpha + 2| \geq 1. (I)$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1 = (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, αφού

$$\text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $y > 0$, τότε είναι $|y| = y$.

Έτσι η σχέση (I) ισοδύναμα γράφεται $|(\alpha - 1)^2 + 1| \geq 1$, δηλαδή $(\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$, οπότε $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ σχέση που ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $\alpha^2 - 2\alpha + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4, \text{ άρα το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του συντελεστή του } \alpha^2 \text{ δηλαδή του } 1, \text{ άρα πάντα θετικό για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Όστε}$$

$$|\alpha^2 - 2\alpha + 2| = \alpha^2 - 2\alpha + 2. \text{ Έτσι η σχέση (I) γράφεται ισοδύναμα } \alpha^2 - 2\alpha + 2 \geq 1,$$

$$\text{δηλαδή } \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \text{ άρα } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

265 ΘΕΜΑ 2

α) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$, οπότε η εξίσωσή της γίνεται $y = -2x + \beta$. Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο (1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή:

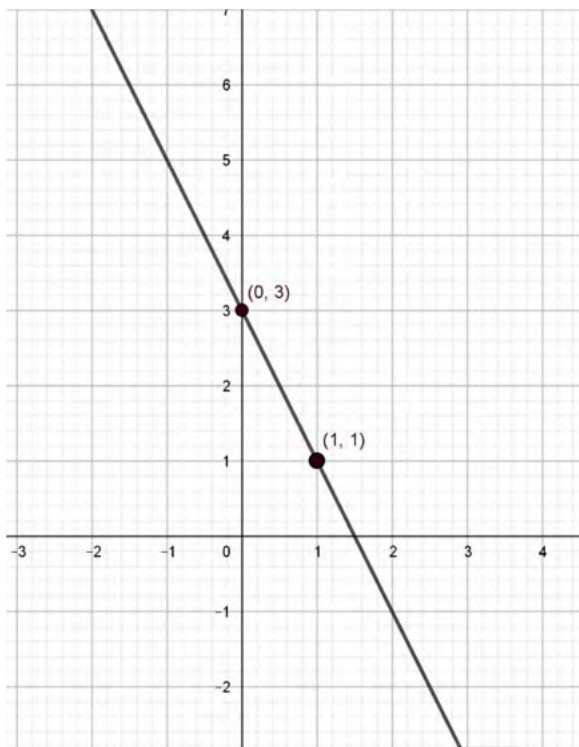
$$1 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 3$.

β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε:

$$y = -2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

**266** ΘΕΜΑ 2

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε

έχει κλίση $\alpha_2 = \frac{3}{4}$.

β) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο A(4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 1 = 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2.$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x - 2$.



γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε

$y = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{8}{3}, 0)$, αφού για $y = 0$ έχουμε:

$$0 = \frac{3}{4}x - 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$

$$8 = 3x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{8}{3}$$

267 ΘΕΜΑ 2

α) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$, οπότε, $\frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\alpha^3 < \beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

268 ΘΕΜΑ 2

α) Πρέπει και αρκεί να ισχύει: $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

β) Έχουμε: $f(4) = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3$, άρα το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Το $x = -1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Άρα το σημείο Ν δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

269 ΘΕΜΑ 4

α) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής, ο τύπος της $f(x)$, ισοδύναμα γίνεται:

$$f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = |x-3| + 4 - |2(3-x)| - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = |x-3| - 2|3-x| + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2 - |x-3|$$

β) Για $x \geq 3$ είναι $x-3 \geq 0$, άρα $|x-3| = x-3$. Επίσης, για $x < 3$ είναι $x-3 < 0$ οπότε $|x-3| = 3-x$. Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (3-x), & \text{αν } x < 3 \\ 2 - (x-3), & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

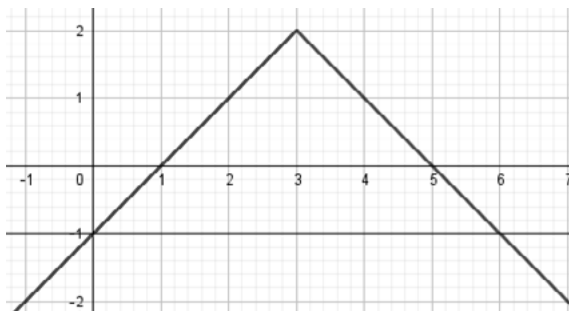
Για $x \geq 3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y = 5-x$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(3, 2)$ και $(5, 0)$.

Για $x < 3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y = x-1$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(0, -1)$ και $(1, 0)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ)

ι) Αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y = -1$ προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = -1$. Από το σχήμα προκύπτει ότι $0 < x < 6$.



ii) Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) > y &\Leftrightarrow 2 - |x - 3| > -1 \Leftrightarrow -|x - 3| > -3 \Leftrightarrow \\ |x - 3| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x - 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6. \end{aligned}$$

270

ΘΕΜΑ 4

α) Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$. Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Leftrightarrow 1 - (x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 < -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} > 1 \Leftrightarrow |x - 1| > 1 \Leftrightarrow x - 1 < -1 \text{ ή } x - 1 > 1 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2. \end{aligned}$$

Άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $x \geq 1$, τότε $x - 1 \geq 0$, οπότε $|x - 1| = x - 1$ και $g(x) = x - 1 + 2 = x + 1$

ii) Αν $x < 1$, τότε $x - 1 < 0$, οπότε $|x - 1| = -x + 1$ και $g(x) = -x + 1 + 2 = -x + 3$.

Άρα $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1. \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

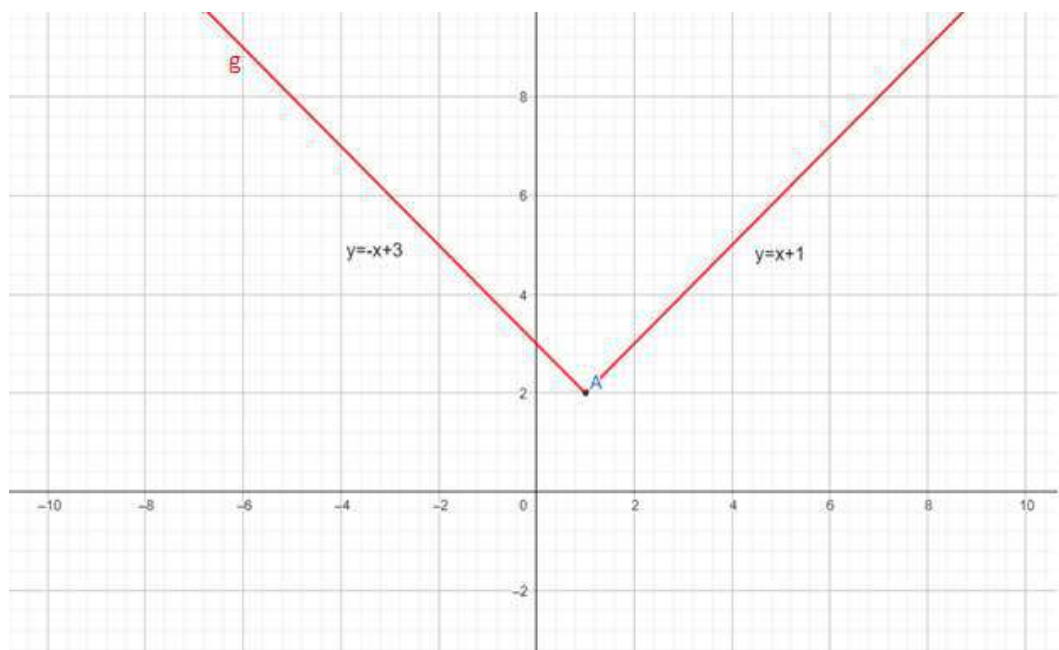
ι) από το τμήμα της ευθείας $y = x + 1$, όταν $x \geq 1$ για $x \in (1, +\infty)$, με πίνακα τιμών

x	y
1	2
2	3

ii) από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 3$, όταν $x < 1$ για $x \in (-\infty, 1)$, με πίνακα τιμών

x	y
1	2
-2	5

Συνεπώς στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_g



γ) Είναι: $f(x) - g(x) = 1 - (x - 1)^2 - |x - 1| - 2 = -|x - 1|^2 - |x - 1| - 1$.

Αν θέσουμε $|x - 1| = \omega$ τότε η παραπάνω διαφορά γράφεται $-\omega^2 - \omega - 1$ και είναι πάντα αρνητική, αφού είναι τριώνυμο του ω , με $a = -1 < 0$ και διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) - g(x) < 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .



Εναλλακτική λύση:

$$\text{Ισχύουν } (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$$

$$\text{με } x \in \mathbb{R} \text{ και } |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1|+2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2 \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Άρα $f(x) < g(x)$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

271 ΘΕΜΑ 2

α) Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεων της. Επειδή η δεξαμενή έχει βάση τετράγωνη θέτουμε x το μήκος και το πλάτος της οπότε το ύψος της θα είναι $\frac{x}{4}$. Άρα ο όγκος της δεξαμενής V θα είναι:

$$V = x \cdot x \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{4}$$

Αφού η δεξαμενή έχει όγκο $V = 16m^3$ θα έχουμε:

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 64 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow$$

$$x = 4m.$$

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος ίσα με $4m$ και ύψος ίσο με $1m$.

β) Έστω x , ($x > 0$) το μήκος της δεξαμενής. Τότε το πλάτος της θα είναι $x-2$ και ο όγκος της δεξαμενής θα ισούται με $V = 2x(x-2)$.

Οπότε έχουμε :

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$2x(x - 2) = 16 \Leftrightarrow$$

$$x(x - 2) = 8$$

$$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0.$$

Τότε:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} \\ \frac{2+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} -2 & \text{απορρίπτεται, γιατί πρέπει } x > 0 \\ 4, & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ) Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του υγρού μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του υγρού θα είναι:

$$V_{\text{πετρ.}} = 10 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2 \cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$8 \cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{10}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ m.}$$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4} \text{ m}$.

**272**

ΘΕΜΑ 2

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ και η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$, αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$.

β) Η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$ (εφω $= -\frac{1}{2}$).

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο Α $(-4, 1)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$, αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$, αφού για $y=0$ έχουμε:

$$0 = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow$$

$$2 = -x \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

**273** ΘΕΜΑ 2

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 4, \text{ τότε}$$

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 4, \text{ τότε}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

274 ΘΕΜΑ 4

α) Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο όταν $f(2) = 4$.

Είναι: $f(2) = \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4$, άρα το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα x' λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$.

275 ΘΕΜΑ 4



α) Την χρονική στιγμή $t = 0$ το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο το οποίο είναι $Y_1(0) = 150$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5) = 150 + 50 \cdot 5 = 400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10° λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα $[10, 20]$.

Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστρέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:

$$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2 \text{ λεπτά}$$

και $Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16 \text{ λεπτά}$

δ)

i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το 5° λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:

$$Y_1(t+1) - Y_1(t) = [150 + 50(t+1)] - (150 + 50t) = 50 \text{ μέτρα.}$$

ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το 10° μέχρι το 20° λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού:

$$Y_2(t+1) - Y_2(t) = [650 - 25(t+1)] - (650 - 25t) = -25 \text{ μέτρα.}$$

276

ΘΕΜΑ 4

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega, \text{ δηλαδή}$$

$$255 = 300 + 3\omega, \text{ οπότε}$$

$$\omega = -15.$$

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους ν , τότε $\alpha_\nu = 45$ (το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του ν . Συνεπώς,

$$\alpha_\nu = 45 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 45 \Leftrightarrow$$

$$300 + (\nu - 1)(-15) = 45 \Leftrightarrow$$

$$300 - 15\nu + 15 = 45 \Leftrightarrow$$

$$15\nu = 270 \Leftrightarrow$$

$$\nu = 18$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{18} = S_{18}.$$

Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu), \text{ συνεπώς}$$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}), \text{ οπότε τελικά}$$

$$S_{18} = 9(300 + 45) = 9 \cdot 345 = 3105.$$

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1,



β_n είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο n και (β_n) είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_n \leq \alpha_n$. Δηλαδή:

$$147 + (n-1)3 \leq 300 + (n-1)(-15) \Leftrightarrow$$

$$144 + 3n \leq 315 - 15n \Leftrightarrow$$

$$18n \leq 171 \Leftrightarrow$$

$$n \leq \frac{171}{18} \Leftrightarrow$$

$$n \leq 9,5$$

Άρα η μέγιστη τιμή του n είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

277 ΘΕΜΑ 4

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\beta) -2 \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(x) > 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, με βάση το α) ερώτημα.

Καθώς είναι $\alpha = 1 > 0$, παρατηρούμε ότι είναι $f(x) > 0$ για

$$x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	

**278** ΘΕΜΑ 4

α) Η ευθεία $y + \frac{1}{2}x = 4$ τέμνει τον γ' άξονα στο σημείο Δ(0, 4) και τον x' άξονα στο σημείο

E(8, 0), αφού

$$\text{για } x = 0, \text{ έχουμε: } y + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4 \Leftrightarrow y = 4 \text{ και}$$

$$\text{για } y = 0, \text{ έχουμε: } 0 + \frac{1}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

β) Το Γ είναι σημείο του ΔΕ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων Δ(0, 4) και E(8, 0). Δηλαδή:

$$0 \leq t \leq 8.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y + \frac{1}{2}x = 4$, οπότε:

$$y_{\Gamma} + \frac{1}{2}t = 4 \Leftrightarrow y_{\Gamma} = 4 - \frac{1}{2}t.$$

γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{(O\Delta + B\Gamma)OB}{2},$$

όπου: $O\Delta = y_{\Delta} = 4,$

$$B\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t \quad \text{και}$$

$$OB = x_{\Gamma} = t.$$

Οπότε:

$$E(t) = \frac{\left(4 + 4 - \frac{1}{2}t\right)t}{2} = \frac{8t - \frac{1}{2}t^2}{2} = \frac{8t}{2} - \frac{\frac{1}{2}t^2}{2} = 4t - \frac{1}{4}t^2, \quad \text{με } t \in [0, 8].$$

δ)

$$E(t) = 9,75 \Leftrightarrow$$

$$4t - \frac{1}{4}t^2 = 9,75 \Leftrightarrow$$



$$16t - t^2 = 39 \Leftrightarrow$$

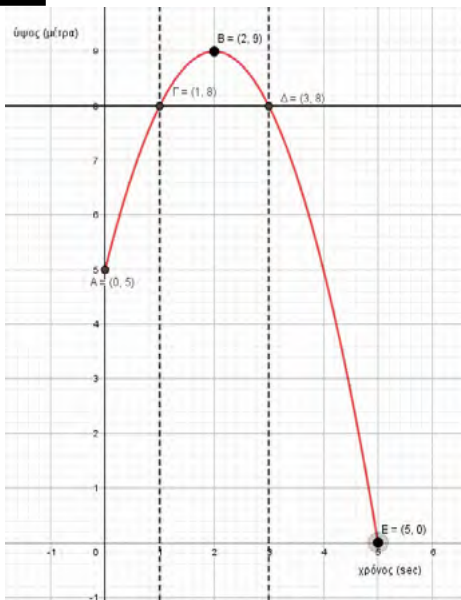
$$t^2 - 16t + 39 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 3 \quad \text{ή} \quad t = 13$$

και επειδή $t \in [0, 8]$, δεκτή είναι η λύση $t = 3$. Συνεπώς το σημείο Γ έχει συνετεταγμένες:

$$x_{\Gamma} = t = 3$$

$$y_{\Gamma} = 4 - \frac{1}{2}t = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} = 2,5$$

279 ΘΕΜΑ 2

α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο A (0,5). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο B (2,9). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2=2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία $y=8$ που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το Γ(1,8) και Δ(3,8). Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3=1$ sec και $t_4=3$ sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα x' (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα

έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα x' , το Ε που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5 = 5 \text{ sec}$.

280 ΘΕΜΑ 2

α) Αφού η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 45° ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας α θα ισούται με $\alpha = \tan 45^\circ$. Άρα $\alpha = 1$, οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ θα ισχύει $3 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

β) Αφού οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα $\lambda = 1$. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \kappa$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$ θα ισχύει $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -2$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$.

281 ΘΕΜΑ 4

α) Για να είναι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει το γινόμενο πρώτου επί τον τρίτο να ισούται με το τετράγωνο του δευτέρου.

$$\text{Πράγματι } \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \frac{\kappa \cdot \kappa \cdot \lambda}{\lambda} = \kappa^2.$$

Άρα ισχύει.

β) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ έχουν άθροισμα:

$$\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \frac{\kappa + \kappa\lambda + \kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)$$

Προφανώς $\frac{\kappa}{\lambda} \neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$.



Πράγματι το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

γ) Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το γινόμενο των ριζών ισούται με

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16.$$

Όμως από το (α) έχουμε $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \kappa^2$.

Οπότε $\kappa^2 = 16 \Leftrightarrow |\kappa| = 4 \Leftrightarrow \kappa = 4$ αφού $\kappa > 0$.

Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το άθροισμα των ριζών ισούται με

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-10}{1} = -10.$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{4}{\lambda} + 4\lambda = -10 \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 = -10\lambda \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 + 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-5-3}{4} \\ \frac{-5+3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ δεκτές.}$$

Επομένως για $\lambda = -2$ οι αριθμοί είναι $-2, 4, -8$, ενώ για $\lambda = -\frac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8, 4, -2$

282 ΘΕΜΑ 2

α) Για να αποτελούν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε να έχουν την ιδιότητα $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$.

Δηλαδή ισοδύναμα $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}$, το οποίο δεν ισχύει, διότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, ενώ ο $\frac{3}{2}$ είναι ρητός.

β) Για την πρόοδο (α_n) ισχύει ότι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Εφόσον η (α_n) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, ο n -οστός της όρος θα έχει τη μορφή $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$, όπου α_1, λ , ο πρώτος όρος και ο λόγος της προόδου αντίστοιχα.

Επειδή $\alpha_1 = 2$, $\lambda = \sqrt{2}$ ο n -οστός όρος είναι: $\alpha_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

283 ΘΕΜΑ 4

α) Ισχύει ότι $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega, \text{ άρα}$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 = \alpha_{10} - 9\omega = 50 - 9 \cdot 2 = 32.$$

Συνεπώς ισχύει ότι $\alpha_1 = 32$ και $\omega = 2$.

β) Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι ίσο με:

$$S_n = \frac{n}{2}(2\alpha_1 + (n - 1)\omega).$$

Επομένως για $n = 40$ έχουμε:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \cdot 32 + 39 \cdot 2) = 20(64 + 78) = 20 \cdot 142 = 2.840.$$



Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να σουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_3, \dots$ με πρώτο όρο $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\delta = 4$.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές.

Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \cdot 32 + 19 \cdot 4) = 10(64 + 76) = 10 \cdot 140 = 1.400.$$

284 ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει:

$$x - 2 \geq 0.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = [2, +\infty)$.

β) Από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, ισχύει ότι $6 \in A$, οπότε είναι δυνατό να

υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης

$$f(6) = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2.$$

Όμως, $-1 < 2$, άρα -1 δεν ανήκει στο A .

Ακόμα $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, διότι ισοδύναμα $\sqrt{2} < 4$.

Συνεπώς για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

285 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -6$, και διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0$ οπότε έχει άνισες ρίζες που είναι οι αριθμοί

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

β) Οι αριθμοί $\kappa-2$, κ , $2\kappa+3$, $\kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa > 0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, μόνο όταν κανένας από αυτούς δεν είναι 0 και ισχύει:

$$\kappa^2 = (2\kappa+3)(\kappa-2) \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\kappa^2 - 4\kappa - 6 + 3\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -2 \text{ (από το ερώτημα (α))}$$

Η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται αφού πρέπει $\kappa > 0$, ενώ η τιμή $\kappa = 3$ είναι δεκτή. Άρα $\kappa = 3$.

286 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2 = 3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3} = 4+4 = 8$$

β) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$ μόνο όταν ισχύει $f(x) < 4$.

Είναι:

$$f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1, 3)$ είναι οι: 0, 1, 2 και επειδή $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(2, 1)$.

γ) Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε:

$$(\alpha-1)^2 = (\beta-1)^2, \text{ οπότε}$$

$$(\alpha-1)^2 - (\beta-1)^2 = 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\alpha-1+\beta-1)(\alpha-1-\beta+1) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha+\beta-2)(\alpha-\beta) = 0$$

Η τελευταία ισότητα, με $\alpha \neq \beta$ δίνει:

$$\alpha+\beta-2=0, \text{ οπότε } \alpha+\beta=2$$

που είναι το ζητούμενο.

**287** ΘΕΜΑ 4

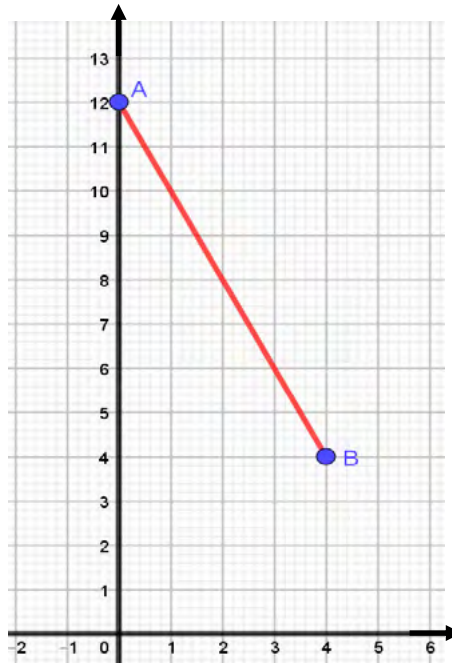
α) Για το εμβαδόν (ΑΔΕ) ισχύει: $(ADE) = (ABGD) - (ABE) - (GDE) =$

$$\frac{AB + GD}{2} \cdot AD - \frac{AB \cdot EZ}{2} - \frac{DG \cdot EH}{2} = \frac{2 + 6}{2} \cdot 4 - \frac{2(4-x)}{2} - \frac{6x}{2} = 16 - (4-x) - 3x \\ = 16 - 4 + x - 3x$$

Όστε $f(x) = -2x + 12$.

Για την μεταβλητή x , πρέπει $x \in [0, 4]$, αφού απαιτούμε τα μήκη ΕΗ και ΕΖ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x \geq 0$ και $4 - x \geq 0$, άρα $x \leq 4$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 12$ με $x \in R$, γνωρίζουμε ότι είναι μια ευθεία, οπότε εδώ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα τα σημεία $A(0, 12)$ και $B(4, 4)$, αφού $f(0) = -2 \cdot 0 + 12 = 12$ και $f(4) = -2 \cdot 4 + 12 = -8 + 12 = 4$.



γ) $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f\left(\frac{64}{16}\right) =$

$$(-2 \cdot \frac{1}{16} + 12) + (-2 \cdot \frac{2}{16} + 12) + \dots + (-2 \cdot \frac{64}{16} + 12)$$

$$\Sigma = -\frac{2}{16}(1 + 2 + 3 + \dots + 64) + 12 \cdot 64 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{64(64+1)}{2} + 12 \cdot 64. \text{ Τελικά:}$$

$$\Sigma = -4 \cdot 65 + 12 \cdot 64 = (-4 + 12) \cdot 65 - 12 = 8 \cdot 65 - 12 = 520 - 12 = 508.$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ αφού πρόκειται για άθροισμα n διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_n) με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$, $\alpha_n = n$, οπότε από τον γνωστό τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$ παίρνουμε $S_n = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

288 ΘΕΜΑ 2

α)

i) Ισχύει $\varepsilon // \delta$ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση.

Η κλίση της ευθείας δ είναι -3 . Άρα $\alpha = -3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3 .

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha = -3 < 0$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -3x + 5$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y = 0$.

Για $y = 0$ έχουμε: $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $(\frac{5}{3}, 0)$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $x = 0$. Για $x = 0$ έχουμε: $y = 5$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, 5)$

289 ΘΕΜΑ 2

α) i) Για $\lambda = -2$ η εξίσωση γίνεται $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x = 2$.

ii) Για $x = 1$ η εξίσωση γίνεται

$$(\lambda - 1)1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

β) Για να έχουμε ταυτότητα η εξίσωση θα είναι της μορφής $0x = 0$, δηλαδή $\lambda - 1 = 0$ και $2\lambda - 2 = 0$, επομένως η δύο εξισώσεις συναληθεύουν για $\lambda = 1$.

**290** ΘΕΜΑ 2

α) Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 5 του συνόλου A δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 3 του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

β)

i. Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

iii. Είναι $f(1) = f(2) = 2$.

291 ΘΕΜΑ 2

α) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (-2, 8)$.

β) Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(-2, 8)$, δηλαδή οι : $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

γ) Είναι $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ οπότε:

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ και } A \cap B = \{-1, 0, 3, 4\}.$$

292 ΘΕΜΑ 2

α) $A = [-10, 5]$ και $f(A) = [-3, 5]$.

β) $f(-2) = 5$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ή $x = 3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x').

δ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5]$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον x').

293 ΘΕΜΑ 4

α)

- i. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = c$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι για να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f πρέπει $c \geq 1$.
- ii. Για να έχει κοινά σημεία η ευθεία $\varepsilon: y = c$ με τη γραφική παράσταση της f , πρέπει η εξίσωση $|x - 2| + 1 = c \Leftrightarrow |x - 2| = c - 1$ να έχει λύση. Επειδή είναι $|x - 2| \geq 0$, αρκεί $c - 1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β) Για $c \geq 1$ η $|x - 2| = c - 1$ έχει λύσεις τις:

$$x - 2 = c - 1 \Leftrightarrow x = c + 1 \text{ ή } x - 2 = -(c - 1) \Leftrightarrow x = 3 - c.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

γ)

- i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1 \leq c \leq 2$.
- ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι $(AB) = |c + 1 - (3 - c)| = |2c - 2|$. Άρα:

$$(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c - 2 \leq 2,$$

η οποία γίνεται:

$$-1 \leq c - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2.$$

Αλλά από το ερώτημα α) πρέπει $c \geq 1$. Άρα τελικά $1 \leq c \leq 2$.**294** ΘΕΜΑ 2α) Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|0 - 1| - 3) \cdot x = 0 + 2 \Leftrightarrow (1 - 3) \cdot x = 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Για $\alpha = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|5 - 1| - 3) \cdot x = 5 + 2 \Leftrightarrow (4 - 3) \cdot x = 7 \Leftrightarrow x = 7.$$



β)

i. Είναι $|\alpha - 1| = 3 \Leftrightarrow \{\alpha - 1 = 3 \text{ ή } \alpha - 1 = -3\} \Leftrightarrow \{\alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2\}.$

ii. Για $\alpha = 4$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|4 - 1| - 3) \cdot x = 4 + 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 6,$$

που είναι αδύνατη.

Για $\alpha = -2$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|-2 - 1| - 3) \cdot x = -2 + 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0,$$

που είναι ταυτότητα.

295

ΘΕΜΑ 4

α) Το τριώνυμο έχει $\Delta = 4\kappa^2 + 8 > 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β) Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2|\kappa|x - 2 = 2x - \kappa^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(|\kappa| + 1)x + \kappa^2 - 2 = 0$$

Βρίσκουμε $\Delta = 4(|\kappa| + 1)^2 - 4(\kappa^2 - 2) = 4(2|\kappa| + 3) > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

γ) Για $\kappa = -3$,

$$f(x) = x^2 - 6x - 2 \text{ και } y = 2x - 9$$

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση } f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 7 = 64 - 28 = 36, \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$\text{Άρα } x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 7$$

Τα σημεία τομής είναι $A(1, -7)$ και $B(7, 5)$

$$\delta) \text{ Είναι } (AB) = \sqrt{(1 - 7)^2 + (-7 - 5)^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

296 ΘΕΜΑ 2

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β) Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ) $A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

297 ΘΕΜΑ 2

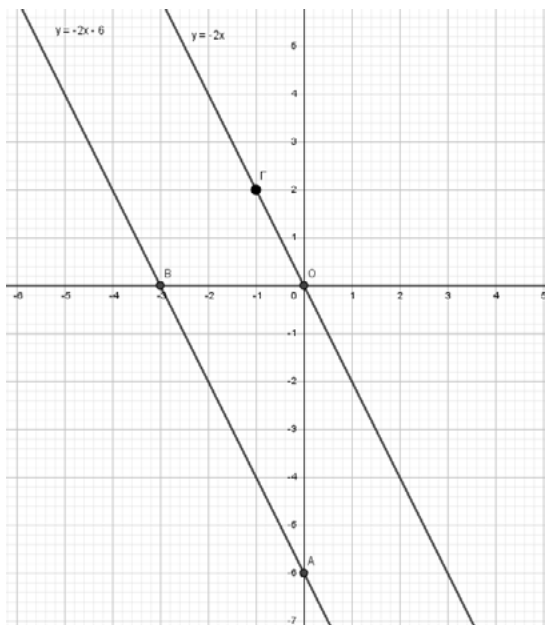
α) Αφού η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(0,-6)$ ισχύει: $-6 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow -6 = \beta$.

Τότε η ευθεία ε_1 παίρνει τη μορφή $y = \alpha x - 6$. Επιπλέον αφού η ε_1 διέρχεται και από το σημείο $B(-3,0)$ έχουμε $0 = \alpha \cdot (-3) - 6 \Leftrightarrow 3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -2$

Άρα η ευθεία ε_1 έχει τύπο $y = -2x - 6$.

β) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \alpha x$. Επιπλέον οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία ε_2 έχει τύπο $y = -2x$.

γ) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0,-6)$ και $B(-3,0)$. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και $\Gamma(-1,2)$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι:



**298** ΘΕΜΑ 4

α) Έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{1(\alpha+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}^2-\sqrt{\beta}^2} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{1} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}.$$

β)

I. Έχουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Ομοίως $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$

Οπότε η παράσταση $A = (\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})^2$ γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = \sqrt{\alpha}^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 + \sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 \\ &= \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

II. Έστω $A > 4\sqrt{\alpha\beta}$ δηλαδή $2\alpha + 2\beta > 4\sqrt{\alpha\beta}$ επομένως $\alpha + \beta > 2\sqrt{\alpha\beta}$ ή αλλιώς $\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 > 0$, που ισχύει αφού $\alpha \neq \beta$ και $\sqrt{\alpha}^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 > 0$

γ) Έχουμε $\alpha - \beta = 1$ επομένως $\alpha = \beta + 1$. Αν αντικαταστήσουμε το α στη σχέση $\alpha \cdot \beta = 6$ θα έχουμε $(\beta + 1) \cdot \beta = 6$ δηλαδή $\beta^2 + \beta - 6 = 0$. Έχουμε $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$. Οπότε

$$\beta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 - 5}{2} \\ \frac{-1 + 5}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2} = \begin{cases} -3 \text{ απορρίπτεται αφού } \beta \text{ θετικός αριθμός} \\ 2 \text{ δεκτή.} \end{cases}$$

Άρα θα έχουμε $\alpha = \beta + 1 = 2 + 1 = 3$.

299 ΘΕΜΑ 4

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $3 - |x| \neq 0$

Επειδή ισχύει

$$3 - |x| = 0 \Leftrightarrow -|x| = -3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί $x \neq \pm 3$.

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

β) Για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|} = \frac{3^2 - |x|^2}{3 - |x|} = \frac{(3 + |x|)(3 - |x|)}{3 - |x|} = 3 + |x|$$

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα x' λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = -3$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα η γραφική παράσταση C_f δεν τέμνει τον άξονα x' .

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ πρέπει να βρούμε το $f(0)$.

Ισχύει $f(0) = 3 + |0| = 3$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0, 3)$.

δ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

$$\text{Η εξίσωση } g(x) = f(x) \text{ γίνεται}$$

$$-x^2 + 3 = 3 + |x| \text{ δηλαδή}$$

$$-|x|^2 + 3 - 3 - |x| = 0 \text{ και τελικά}$$

$$|x|^2 + |x| = 0$$

Επειδή $|x|^2 \geq 0$ και $|x| \geq 0$ ισχύει $|x|^2 + |x| = 0$ αν και μόνο αν $x=0$.

Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το $(0, 3)$.

300 ΘΕΜΑ 4

α) Αφού το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη C_f ισχύει $f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

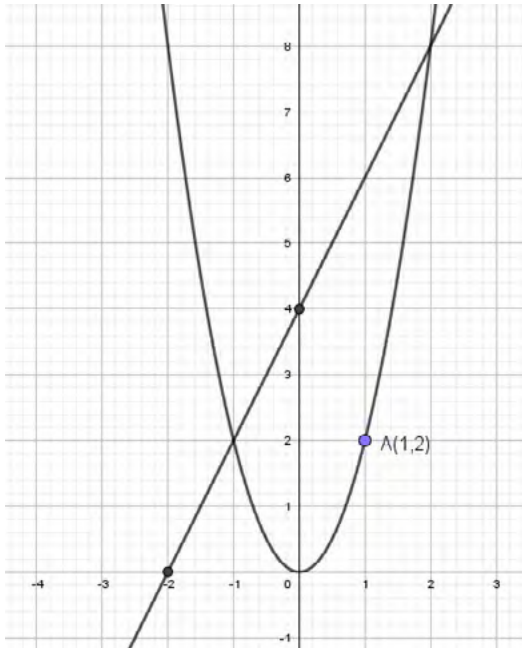
β)

- i. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ έχει κλίση λ , άρα $\lambda = 2$. Επίσης, το σημείο $B(1, 6)$ ανήκει στην ευθεία, άρα $6 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$. Άρα η ευθεία έχει



εξίσωση $y = 2x + 4$.

- ii. Για $y = 0$ έχουμε $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2$ άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο $(-2, 0)$. Επίσης, για $x = 0$ είναι $y = 2 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow y = 4$, άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 4)$. Τοποθετούμε τα παραπάνω σημεία στο σχήμα και χαράσσουμε την ευθεία ε .



- i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x \in (-1, 2)$.
- ii. Είναι $f(x) < 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 < 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 9$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-1, 2)$.

301 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}) = \frac{6}{2} = 3$$

και

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2 - (\sqrt{5})^2) = \frac{1}{4}(9 - 5) = \frac{4}{4} = 1$$

Άρα, $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha \cdot \beta = 1$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(9 + 5 + 6\sqrt{5} + 9 + 5 - 6\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 28 = 7 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

302 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$A = 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 4 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2 = 4 - 1 = 3$$

β) Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$ έχουμε:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{2}{x} = 4$$



γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x^2+1=\alpha x \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta \geq 0$. Έτσι, έχουμε:

$\Delta = \alpha^2 - 4 \geq 0$, οπότε $\alpha^2 \geq 4$, απ' όπου προκύπτει $\sqrt{\alpha^2} \geq \sqrt{4}$, δηλαδή $|\alpha| \geq 2$, που είναι το ζητούμενο.

303 ΘΕΜΑ 4

α) Ισχύουν: $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$, οπότε $\alpha_1 + 2\omega = 8$, (1) και $\alpha_1 + 10\omega = 32$, (2).

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) βρίσκουμε

$$8\omega = 24 \Rightarrow \omega = 3$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\alpha_1 + 6 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Η πρόοδος (β_v) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = 57 + 2 = 59$ και

$$\alpha_v = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(v-1) = 59 \Leftrightarrow 3v = 60 \Leftrightarrow v = 20$$

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των $2v$ πρώτων όρων της (α_v) είναι ίσο με το άθροισμα των v πρώτων όρων

της (β_v) , οπότε έχουμε: $[2\alpha_1 + (2v-1) \cdot 3] \cdot \frac{2v}{2} = [2\beta_1 + (v-1) \cdot 2] \cdot \frac{v}{2}$, απ' όπου, με αντικατάσταση

των πρώτων όρων, παίρνουμε $2 \cdot 2 + (2v-1) \cdot 3 = 2(57 + v-1) \cdot \frac{1}{2}$.

Η τελευταία ισότητα γράφεται $4 + 6v - 3 = 57 + v - 1$, απ' όπου προκύπτει ότι $5v = 55$, δηλαδή $v = 11$, που είναι η ζητούμενη τιμή του v .

304 ΘΕΜΑ 2

α) Επειδή $\alpha=2$, $\beta=-1$ και $\gamma=-1$ η διακρίνουσα είναι

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-1) = 9 > 0$. Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως το τριώνυμο γίνεται

$$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$$

Άρα έχουμε $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$.

β) Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x) \leq -1 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 0$

Έχουμε να λύσουμε ανίσωση δευτέρου βαθμού.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος. Άρα μηδενίζεται για $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$ και επειδή το $\alpha=2>0$ προκύπτει:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων το τριώνυμο θα είναι ομόσημο του α , δηλαδή θετικό για $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$.

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

305 ΘΕΜΑ 2

α) Η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο B, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου A σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου B.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο B στο σύνολο A θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο B αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο A, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

**306** ΘΕΜΑ 4

α) i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, δηλαδή:

$81 = \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, επομένως $\frac{81}{54} = \sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\frac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$$\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})^7\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27^2 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{3})^{14} \Leftrightarrow \frac{3^6 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3^7, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

β) Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{27\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$.

Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha_1 (\sqrt{3})^{n-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ έχουμε ότι $\alpha_1 (\sqrt{3})^{7-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$, οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^{8-7} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{(\sqrt{3})^n}{2}.$$

γ) Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$

307 ΘΕΜΑ 4

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u . Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $t \in [0, +\infty)$.

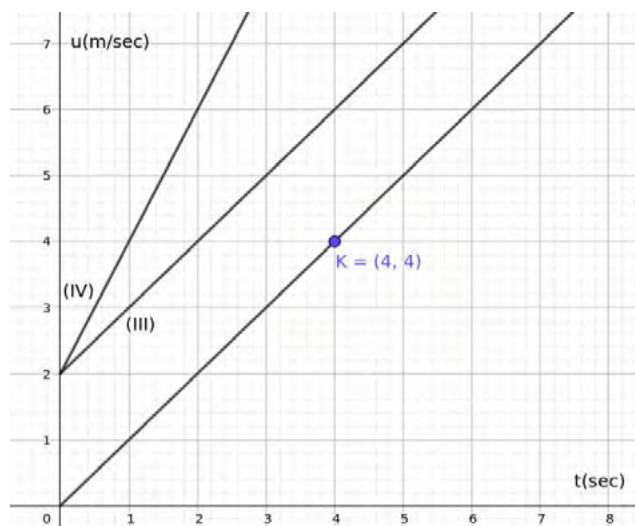
β) i) Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του ταχύτητα θα είναι 0m/sec, άρα αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (I).

Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (II).

ii) Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4 sec το όχημα της γραμμής (II) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή $t=4\text{sec}$ τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (I) κινείται ταχύτερα.

iii) Η επιτάχυνση a αποτελεί την κλίση της ευθείας (III), η οποία θα περιγράφει την ταχύτητα ως προς το χρόνο του οχήματος Γ, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec . Για να έχει σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, θα πρέπει η ευθεία (III) να μην τέμνεται με την ευθεία (I) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο $\Lambda(0,2)$, θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτής της ευθείας (I). Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο ευθείες:

η (III) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.



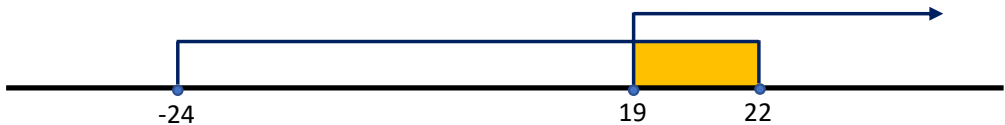
**308** ΘΕΜΑ 2

α) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $\frac{-(3-2x)}{7} \geq 5$ οπότε $\frac{2x-3}{7} \geq 5 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 35$, άρα

$$2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19.$$

β) Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $|x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -23-1 \leq x \leq 23-1 \Leftrightarrow -24 \leq x \leq 22$.

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ'όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.

**309** ΘΕΜΑ 2

α) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

β) Αν x ρητός, τότε $f(x) = 2x$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(2x)^2 = 4x - 1, \text{ δηλαδή } 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0. \text{ Έτσι, } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

310 ΘΕΜΑ 4

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Μ θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y = g(x)$, άρα

θα ισχύει $g\left(\frac{3\beta}{2}\right) = -3 - \frac{\beta}{2}$ οπότε $\frac{3\beta}{2} + \beta = -3 - \frac{\beta}{2}$ άρα $\frac{3\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \beta = -3$.

Έτσι $3\beta = -3$, έτσι $\beta = -1$.

β) Για $\beta = -1$

- i) Είναι $f(x) = x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y = f(x) = 0$, άρα $x^2 - 1 = 0$ οπότε $x^2 = 1$. Τελικά $x = 1$, $x = -1$. Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα Α(1, 0) και Β(-1, 0). Επίσης $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το Γ(0, -1).

- ii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) < g(x)$ δηλαδή $x^2 - 1 < x - 1$ άρα $x^2 - x < 0$ ή

$x(x-1) < 0$. Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς μηδέν και 1, αφού για αυτές τις τιμές μηδενίζεται. Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμου, παρατηρώντας ότι ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		+	-	+

Διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 < x < 1$.

- iii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση $x^2 - 1 - 2k(x-1) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα $x^2 - 2kx + (2k-1) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$, για να ισχύει για κάθε $x \in R$ η ανισότητα, πρέπει και αρκεί να ισχύει $\Delta \leq 0$ δηλαδή $(-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2k-1) \leq 0$ άρα πρέπει και αρκεί $4k^2 - 8k + 4 \leq 0$ ή ισοδύναμα αν διαιρέσουμε κάθε όρο με το 4, πρέπει $k^2 - 2k + 1 \leq 0$ δηλαδή $(k-1)^2 \leq 0$ σχέση η οποία αληθεύει μόνο για $k = 1$.

311 ΘΕΜΑ 2

α) Για $x=3$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^3 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6\alpha - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Άρα $\alpha=2$

β) Στην (1) αντικαθιστούμε το $\alpha=2$ και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \text{ απλοποιούμε με το 2 και έχουμε } x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ με } \alpha=1, \beta=-2 \text{ και } \gamma=-3.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες

$$\text{ρίζες } x_1 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3 \text{ και } x_2 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1.$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις $x=-1$ ή $x=3$.

**312** ΘΕΜΑ 4

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ με $x \in \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4(-5) = 36 > 0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1 = \frac{-(-4)+6}{2} = 5$ και $x_2 = \frac{-(-4)-6}{2} = -1$. Το $a=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x^2 - 4x - 5$	+	0	-	0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ αληθεύει

για $x \leq -1$ ή $x \geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g = \mathbb{R}$.

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση

$f(x) = g(x)$, και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -10x = 14 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}.$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $\left(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} < |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < |x + 3|^2 \Leftrightarrow -10x < 14 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{5}.$$

Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x \leq -1$ ή $x \geq 5$ άρα $x \in \left(-\frac{7}{5}, -1\right] \cup [5, +\infty)$.

**313** ΘΕΜΑ 2

$$\alpha) \text{ Έχουμε: } G(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2 - 4} = \frac{4 + 3}{-2} = -\frac{7}{2},$$

$$G(0) = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 - 4} = -\frac{3}{4},$$

$$G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3}{-\frac{1}{2} - 4} = \frac{-1 + 3}{-\frac{9}{2}} = \frac{2}{-\frac{9}{2}} = -\frac{4}{9}.$$

β) Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x = 4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ) Αναζητούμε την τιμή του $x \neq 4$ για την οποία:

$$G(x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x+3}{x-4} = 3 \Leftrightarrow$$

$$2x+3 = 3(x-4) \Leftrightarrow$$

$$2x+3 = 3x-12 \Leftrightarrow$$

$$x = 15.$$

314 ΘΕΜΑ 2

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x+5 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq -5$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = [-5, +\infty)$.

$$\beta) f(-1) = 1 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4 \text{ και } g(11) = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\text{Άρα } f(-1) = g(11).$$

γ) Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία:

$$f(x) = g(4) \Leftrightarrow$$

$$1 - 3x = \sqrt{4+5} \Leftrightarrow$$

$$1 - 3x = 3 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

**315**

ΘΕΜΑ 2

α)

i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha < 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega < 0$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για το σημείο Α: $-\frac{1}{2} \cdot 6 + 4 = -3 + 4 = 1$, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Β: $-\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 = 1 + 4 = 5 \neq 3$, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ: $-\frac{1}{2} \cdot 8 + 4 = -4 + 4 = 0$, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Θα πρέπει:

$$5 = -\frac{1}{2} \cdot k + 4 \Leftrightarrow$$

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot k \Leftrightarrow$$

$$2 = -k \Leftrightarrow$$

$$k = -2.$$

316 ΘΕΜΑ 2

α) i. Από την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 0$, προκύπτει ότι $\beta + \gamma = -\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha.$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma + \alpha = -\beta$ και $\alpha + \beta = -\gamma$, οπότε

$$\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} = \frac{\beta^2}{-\beta} = -\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma^2}{-\gamma} = -\gamma.$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = -\alpha - \beta - \gamma = -(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

που είναι το ζητούμενο.

317 ΘΕΜΑ 2

α) i. Με $\alpha = 1$ οι ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1 : y = 7x - 4 \text{ και } \varepsilon_2 : y = -x + 4$$

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_1 = 7 > 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα x' οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2 = -1 < 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα x' αμβλεία γωνία.

β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει $3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha$. Είναι:

$$3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha \Leftrightarrow 7\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha = -\frac{1}{7}$.

**318** ΘΕΜΑ 4

α) Για κάθε $x \in$ έχουμε:

$$f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 5 = x^2 + 1$$

και

$$f(2-x) = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 + 5 = x^2 + 1$$

οπότε $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με $x = 1,52$ η ισότητα του ερωτήματος (α) δίνει

$$f(2+1,52) = f(2-1,52), \text{ οπότε } f(3,52) - f(0,48) = 0 \quad (1)$$

ενώ με $x = 1,48$ δίνει

$$f(2+1,48) = f(2-1,48), \text{ οπότε } f(3,48) - f(0,52) = 0 \quad (2)$$

Με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48) = f(3,52) - f(0,48) + f(3,48) - f(0,52) = 0.$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2x + \beta$. Με $x = -5$ έχουμε:

$$f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = 2x + \beta$, μόνο όταν η εξίσωση $f(x) = 2x + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Είναι:

$$f(x) = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \beta = 0$$

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση μόνο όταν η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι μη αρνητική. Είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4(5 - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 5 + \beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -4$$

οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta = -4$.

319 ΘΕΜΑ 4

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι

$$T_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_v = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_v = 120 \Leftrightarrow \frac{v(v+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow v(v+1) = 240 \Leftrightarrow v^2 + v - 240 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 961$ και οι ρίζες της

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm 31}{2} = \begin{cases} v_1 = \frac{30}{2} = 15 \\ v_2 = -\frac{32}{2} = -16 \end{cases}$$

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15. Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός ($T_{15} = 120$).

γ) Έστω T_v, T_{v+1} δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με v θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_v + T_{v+1} = \frac{v(v+1)}{2} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} = \frac{1}{2}(v+1)(v+v+2) = \frac{1}{2}(v+1) \cdot 2(v+1) = (v+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

320 ΘΕΜΑ 2

α) Έχουμε: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου $x = 2021$ και $y=1$ προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$ άρα θα είναι ίσο με το A , επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

**321**

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2, με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

ii. Η ακολουθία (β_n) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2, με $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\beta_n = \beta_1 + (n-1) \cdot \omega = 13 + (n-1) \cdot (-2) = 13 - 2n + 2 = 15 - 2n.$$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε n μέρες. Τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$

δηλαδή :

$$\frac{(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = \frac{(2 \cdot 13 + (n-1) \cdot (-2)) \cdot n}{2}$$

$$\text{και ισοδύναμα: } \frac{(2 + 2n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(26 - 2n + 2) \cdot n}{2},$$

$$\text{δηλαδή } \frac{2n \cdot n}{2} = \frac{(28 - 2n) \cdot n}{2}.$$

Και αφού $n \neq 0$, θα είναι $2n = 28 - 2n$, δηλαδή $4n = 28$ και τελικά $n = 7$.

γ) Προφανώς ανεξάρτητα από τον τρόπο που διάβασε το βιβλίο, το πλήθος των

$$\text{σελίδων του βιβλίου είναι το } S_7 = \frac{(2 \cdot 1 + (7-1) \cdot 2) \cdot 7}{2} = 49.$$

δ) Για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$,

$$\text{είναι } \beta_{8-n} = \beta_1 + (8-n-1) \cdot (-2) = 13 - 16 + 2n + 2 = 2n - 1 = \alpha_n.$$

**322** ΘΕΜΑ 4

α) Αφού το σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι

$$y = f(x) = \frac{16}{x} > 0. \text{ Οι συντεταγμένες του σημείου } B \text{ είναι } B(x, 0) \text{ και του σημείου } A(0, \frac{16}{x}).$$

Το ορθογώνιο $OAMB$ έχει εμβαδόν $(OAMB) = (OA) \cdot (OB) = \frac{16}{x} \cdot x = 16$ τετραγωνικές

μονάδες και περίμετρο $\Pi(x) = 2(OA) + 2(OB) = 2 \cdot \frac{16}{x} + 2 \cdot x = 2x + \frac{32}{x}, x > 0.$

β) Αναζητούμε τις τιμές του $x > 0$ για τις οποίες $\Pi(x) = 20$ δηλαδή $2x + \frac{32}{x} = 20$ και

ισοδύναμα $2x^2 + 32 = 20x$ δηλαδή $2x^2 - 20x + 32 = 0$ και τελικά $x^2 - 10x + 16 = 0.$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x = 2$ ή $x = 8$ αφού $S = 2 + 8 = 10$ και $P = 2 \cdot 8 = 16.$

Για $x = 2$ είναι $y = \frac{16}{2} = 8$ οπότε $M_1(2, 8).$

Για $x = 8$ είναι $y = \frac{16}{8} = 2$ οπότε $M_2(8, 2).$

γ)

i. Το $OAM'B$ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $(OA) = (OB)$ δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x} = x$ οπότε $x^2 = 16$ και επειδή $x > 0$ έχουμε ότι $x = 4.$

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή ισοδύναμα

$$2x + \frac{32}{x} \geq 16 \text{ και επειδή } x > 0 \text{ έχουμε ισοδύναμα } 2x^2 + 32 \geq 16x \text{ δηλαδή } 2x^2 + 32 - 16x \geq 0$$

δηλαδή $x^2 + 16 - 8x \geq 0$ και τελικά $(x - 4)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια $OAMB$ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο $OAM'B.$

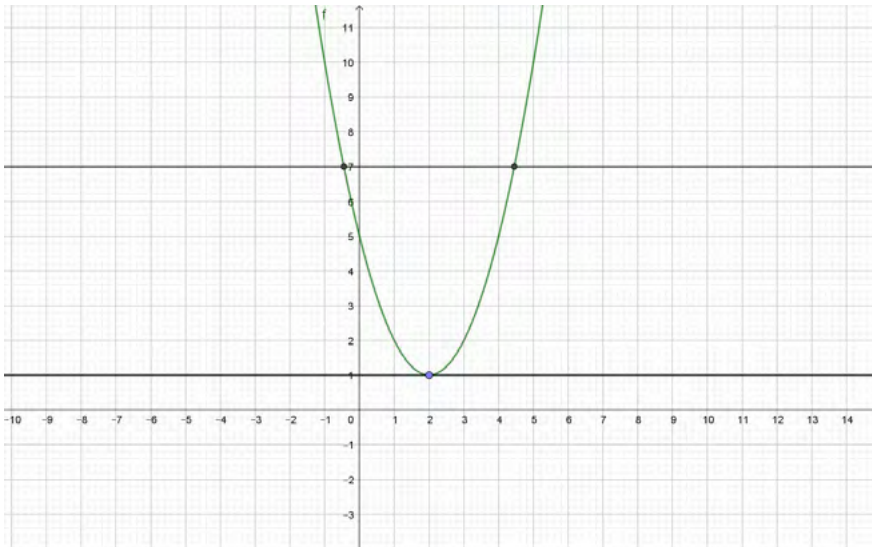
**323** ΘΕΜΑ 4

α) Η ευθεία $y = 7$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,7)$ και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 7$. Είναι

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 24 > 0$ που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y = 7$ ακριβώς δύο κοινά σημεία.



β)

i. Η ευθεία $y = \lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1).$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας. Συγκεκριμένα :

- αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta < 0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αφού η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda > 1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda > 1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4.$$

**324** ΘΕΜΑ 4

α) Είναι

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2} = \frac{|x-1| - 3|1-x| + 2|x-2|}{2} = \\
 &= \frac{|x-1| - 3|x-1| + 2|x-2|}{2} = \frac{2|x-2| - 2|x-1|}{2} = \\
 &= \frac{2(|x-2| - |x-1|)}{2} = |x-2| - |x-1| = d(x, 2) - d(x, 1).
 \end{aligned}$$

β) Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) - d(x, 1) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) = d(x, 1)$.

Αν M το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία A και B και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος AB . Άρα $x = \frac{3}{2}$.

$$\gamma) \text{ Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-2| = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x-1 \Leftrightarrow -2 = -1 \\ \text{ή} \\ x-2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x = \frac{3}{2}$.

325 ΘΕΜΑ 4

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 16\lambda^2 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$ είναι $P = -4\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda \neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4, -4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$$f(4) = -4 \Leftrightarrow 16 - 4(\lambda - 1) - 4\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για $\lambda = -1$

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

Πρέπει $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$

Το τριώνυμο έχει: $\Delta = 4 + 16 = 20$

και ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

Αφού $a = 1 > 0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{5}$	$-1 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
$f(x) = x^2 + 2x - 4$	+	0	-	0	+

Άρα $f(x) < 0$ για $x \in (-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$.

326 ΘΕΜΑ 4

α)

i. Ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 0 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$

αρκεί:

$$f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0,$$

η οποία γράφεται $(x + \lambda)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(-1) = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0,$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 + 1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases}$$

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2 + 1} < \sqrt{\lambda^2 + 1}$ άρα $-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.



Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2+1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2+1} \end{cases}$$

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2+1} < \sqrt{\lambda^2+1}$ άρα $-\lambda - \sqrt{\lambda^2+1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}, 0)$.

γ) Η απόσταση των A και B είναι:

$$(AB) = |x_2 - x_1| = |-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1} - (-\lambda - \sqrt{\lambda^2+1})| = |2\sqrt{\lambda^2+1}|.$$

Οπότε:

$$(AB) \geq 2 \Leftrightarrow |2\sqrt{\lambda^2+1}| \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0$$

που ισχύει.

327 ΘΕΜΑ 2

α) Αφού $3 \leq x \leq 5$, θα έχουμε $x - 5 \leq 5 - 5$, άρα $x - 5 \leq 0$. Ακόμα $3 \leq x$, οπότε

$$3 - 2 \leq x - 2, \text{ άρα } 1 \leq x - 2. \text{ Ώστε } x - 2 > 0.$$

β) Γνωρίζουμε ότι αν $y \geq 0$, τότε $|y| = y$ ενώ αν $y \leq 0$, τότε $|y| = -y$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$. Τελικά

$$x = \frac{9}{2}, \text{ λύση η οποία είναι δεκτή, αφού } \frac{9}{2} = 4,5 \in [3,5].$$

328 ΘΕΜΑ 4

α) Προφανώς $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$.

β) Θέτοντας όπου n το $n - 1$, παίρνουμε: $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) = 2(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3 = 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 3 = 2n^2 - n - 1$ για κάθε $n \geq 2$.

γ) Για κάθε $n \geq 2$, έχουμε $a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 3n - (2n^2 - n - 1) = 2n^2 + 3n - 2n^2 + n + 1 = 4n + 1$.

Αλλά $a_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$. Ώστε $a_n = 4n + 1$, για κάθε $n \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (a_n) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{v+1} - \alpha_v = [4(v+1) + 1] - [4v + 1] = 4v + 4 + 1 - 4v - 1 = 4$

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.

329 ΘΕΜΑ 4

α) Η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή:

$$\alpha_{v+1} - \alpha_v = [10 + 3(v+1)] - (10 + 3v) = 10 + 3v + 3 - 10 - 3v = 3.$$

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 10 + 3 \cdot 1 = 13$ και η διαφορά $\omega = 3$.

β) Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $v \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$14 < \alpha_v < 401 \Leftrightarrow$$

$$14 < 10 + 3v < 401 \Leftrightarrow$$

$$4 < 3v < 391 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{3} < v < \frac{391}{3} \Leftrightarrow$$

$$1, \overline{3} < v < 130, \overline{3}$$

Οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{130}$ που είναι 129 όροι.

γ) Έχουμε:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{130} = S_{130} - \alpha_1 = \frac{130}{2}(2\alpha_1 + 129 \cdot \omega) - \alpha_1 = 65(2 \cdot 13 + 129 \cdot 3) - 13 = 26832,$$

ή εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε τον α_2 πρώτο όρο, έχουμε άθροισμα 129 πρώτων όρων και:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{130} &= S_{129} = \frac{129}{2}(2\alpha_2 + 128\omega) = 129(\alpha_2 + 64\omega) = 129(\alpha_1 + \omega + 64\omega) = \\ &= 129(\alpha_1 + 65\omega) = 129(13 + 65 \cdot 3) = 26832. \end{aligned}$$

330 ΘΕΜΑ 4

α) Η παράσταση Α ορίζεται όταν :

$$|x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$|x| \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$x \neq \pm 1$$



και η παράσταση Β όταν:

$$|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$|x| \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$x \neq \pm 2$$

β) Έχουμε: $-x^2 + 4|x| - 3 = -|x|^2 + 4|x| - 3$. Θέτουμε $\omega = |x|$, οπότε

$$-|x|^2 + 4|x| - 3 = -\omega^2 + 4\omega - 3,$$

που είναι τριώνυμο με ρίζες των οποίων το άθροισμα είναι $-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{4}{-1} = 4$ και το γινόμενο

είναι $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-3}{-1} = 3$, οπότε $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 1$. Άρα

$$-\omega^2 + 4\omega - 3 = -(\omega - 1)(\omega - 3)$$

και

$$-|x|^2 + 4|x| - 3 = -(|x| - 1)(|x| - 3).$$

$$\text{Συνεπώς: } A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} = \frac{-(|x| - 1)(|x| - 3)}{(|x| - 1)} = 3 - |x|.$$

Για την παράσταση Β έχουμε:

$$B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2} = \frac{|x|^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2} = \frac{(|x| - 2)^2}{(|x| - 2)} = |x| - 2.$$

γ) Η ανίσωση γίνεται:

$$B - A < 2d(x, 4) - 5 \Leftrightarrow$$

$$|x| - 2 - 3 + |x| < 2|x - 4| - 5 \Leftrightarrow$$

$$2|x| - 5 < 2|x - 4| - 5 \Leftrightarrow$$

$$|x| < |x - 4| \Leftrightarrow$$

$$|x|^2 < |x - 4|^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 < (x - 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 < x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow$$

$$x < 2$$

Δεδομένου ότι για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x \neq \pm 1$ και $x \neq \pm 2$, τελικά η ανίσωση αληθεύει για

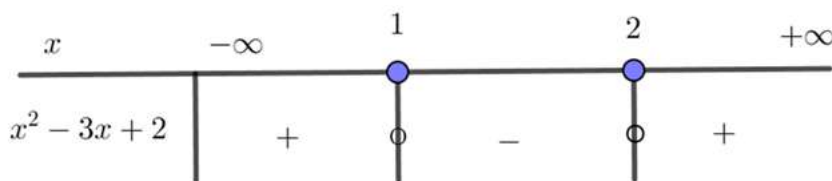
$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2).$$

331 ΘΕΜΑ 4

α) Έχουμε: $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

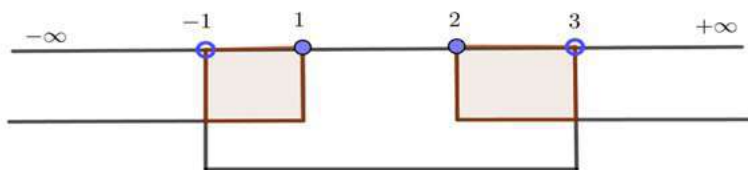
Για να λύσουμε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, θα βρούμε πρώτα τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου. Έχουμε λοιπόν: $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = 3$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 2$, οπότε $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, με $\alpha = 1 > 0$:



Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών,



βλέπουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

γ) Εφόσον οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, θα ισχύει: $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

i. Αν $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, τότε: $\begin{cases} -1 < \rho_1 \leq 1 \\ -3 < 3\rho_2 \leq 3 \end{cases}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:



$-4 < \rho_1 + 3\rho_2 \leq 4$, συνεπώς $-1 < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \leq 1$ και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ είναι κοινή

λύση των ανισώσεων.

ii. Αν $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} -1 < \rho_1 \leq 1 \\ 6 \leq 3\rho_2 < 9 \end{array} \right\}$, και προσθέτοντας κατά μέλη

προκύπτει: $5 < \rho_1 + 3\rho_2 < 10$, συνεπώς $\frac{5}{4} < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} < \frac{5}{2}$ και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$

είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο εάν $2 \leq \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} < \frac{5}{2}$.

332

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$ οπότε $\alpha - 3 \leq 0$ και άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \leq \beta \leq -1$ οπότε $\beta + 2 \geq 0$ και άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$ έχουμε ότι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :

$$|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1.$$

333

ΘΕΜΑ 2

α) Η κλίση της ευθείας OM είναι $\alpha = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση

$$y = \frac{4}{3}x.$$

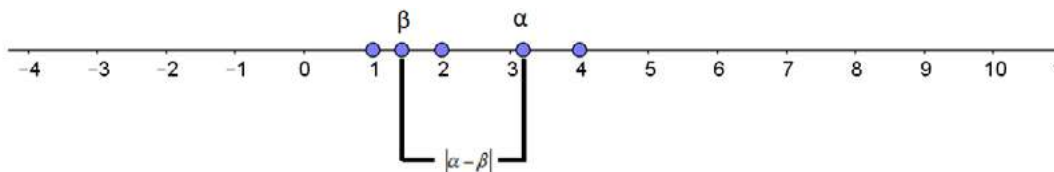
β)

i. Το σημείο N ανήκει στην ευθεία OM οπότε οι συντεταγμένες του N επαληθεύουν την εξίσωση της OM, δηλαδή ισχύει ότι : $\lambda = \frac{4}{3} \cdot (-3) \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ii. Τα σημεία M(3,4) και N(-3,-4) έχουν αντίθετες συντεταγμένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς το O.

334 ΘΕΜΑ 4

α) Η απόσταση $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha, \beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha, \beta) = 3$ όταν $\beta = 1$ και $\alpha = 4$), δηλαδή $d(\alpha, \beta) \leq 3$.

ii. Είναι $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -1 \geq -\beta \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \leq \alpha \leq 4$, $-2 \leq -\beta \leq -1$ έχουμε ότι $2 - 2 \leq \alpha - \beta \leq 4 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha - \beta \leq 3$.

Αφού $0 \leq \alpha - \beta$ είναι $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta \leq 3$ οπότε $d(\alpha, \beta) \leq 3$.

β)

i. Δεδομένου ότι $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και αφού $\beta \leq 2 \leq \alpha$ είναι και $\beta \leq \alpha$.

Έτσι αφού $\beta \leq \alpha$ και $\beta > 0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\beta} \leq \frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή $1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta \leq \alpha$ και $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1 - \frac{\beta}{\alpha} \geq 0$ οπότε $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ και



$$\frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq 0 \text{ οπότε } \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| = \frac{\alpha}{\beta} - 1.$$

Συνεπώς

$$\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \alpha\beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta.$$

Όμως $1 \leq \beta \leq 2 \leq \alpha \leq 4$, οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

335

ΘΕΜΑ 2

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha + 2)^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 2^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β)i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0$$

η οποία ισχύει για:

$$\{(\alpha + 2)^2 = 0 \text{ και } (2\beta + 1)^2 = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \alpha = -2 \text{ και } \beta = -\frac{1}{2} \right\}.$$

336 ΘΕΜΑ 4

α) Αφού τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$.

β) Η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

η οποία για τα $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$, όπως προκύπτει από το ερώτημα α) γίνεται:

$$\alpha = \frac{x_A - y_A}{y_A - x_A} = -1.$$

γ)

i. Από τη σχέση $y_A = x_B$ για $y_A = \kappa^2 - 3\kappa + 1$ και $x_B = \kappa - 2$, έχουμε:

$$\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες:

$$\kappa_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1 \text{ και } \kappa_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στο 1^{o} τεταρτημόριο πρέπει $y_A > 0$ και $x_B > 0$.

Για $\kappa_1 = 1$ έχουμε $y_A = x_B = -1 < 0$, απορρίπτεται.

Για $\kappa_2 = 3$ έχουμε $y_A = x_B = 1 > 0$, δεκτή.

Άρα $\kappa = 3$.

Οπότε, τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4,1)$ και $(1,4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και κλίση $\alpha = -1$, άρα

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή διέρχεται από το σημείο A που για $\kappa = 3$ έχει συντεταγμένες $(4,1)$, θα ισχύει:

$$1 = -4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5.$$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y = -x + 5$.

**337** ΘΕΜΑ 4

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$ ισοδύναμα $36 - 4\lambda \geq 0$ οπότε $-4\lambda \geq -36$ και τελικά $\lambda \leq 9$.

β)

i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο α) ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda \leq 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta = 0$ δηλαδή $36 - 4\lambda = 0$ οπότε $-4\lambda = -36$ και τελικά $\lambda = 9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha \cdot \beta = 9$.

γ) Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12. Τότε $2\alpha + 2\beta = 12$ δηλαδή $\alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.

Δείξαμε στο β) ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 6$, τότε $\alpha \cdot \beta \leq 9$ και μάλιστα $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

338 ΘΕΜΑ 4

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = -\{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x \in A$.

$$\text{Είναι } f(x)=0 \Leftrightarrow x^7-x=0 \Leftrightarrow x(x^6-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x^6-1=0 \Leftrightarrow x^6=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7-x}{x^3-x} = \frac{x(x^6-1)}{x(x^2-1)} = \frac{(x^2)^3-1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2-1} = x^4+x^2+1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow x^4+x^2+1=3 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$, $\omega=-2$ αφού $S=-\frac{\beta}{\alpha}=-1$ και

$$P=\frac{\gamma}{\alpha}=-2.$$

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A .

339 ΘΕΜΑ 4

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το . Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α, β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=13$ και ρίζες τους αριθμούς

$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Επειδή το σημείο A βρίσκεται αριστερά του B στον άξονα



α'x είναι $\alpha < \beta$ και επειδή προφανώς $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ και } \beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

β) Είναι $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 3 = 2 - \sqrt{2} - 3 = -1 - \sqrt{2} < 0$, οπότε $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β) ερώτημα ότι $f(\sqrt{2}) < 0$, θα

πρέπει $\sqrt{2} \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$, δηλαδή $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma, \delta)$ στον α'x έχει εξίσωση $y = \delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y = \delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Είναι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4(-3 - \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 + 12 + 4\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = -\frac{13}{4}.$$

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0, \text{ οπότε } \gamma = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Εναλλακτικά αφού το σημείο $\Gamma(\gamma, \delta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε

$$f(\gamma) = \delta \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

340 ΘΕΜΑ 2

$$\alpha) f(0) = -0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0.$$

$$f(-\sqrt{2}) = -(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

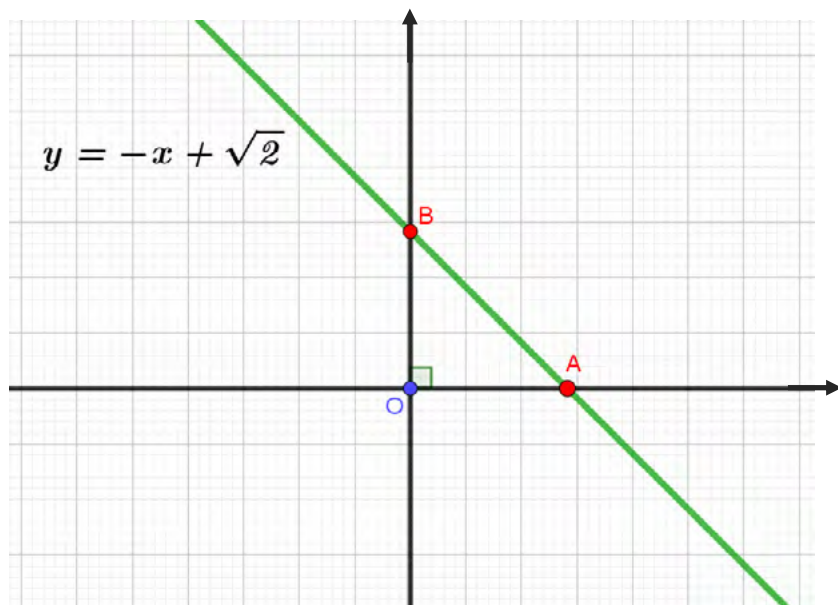
$$[f(-\sqrt{2})]^2 = (2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

β) Για $x = 0$, έχουμε βρει από το α) ερώτημα $y = f(0) = \sqrt{2}$, ενώ για $y = 0$ παίρνουμε

$$0 = -x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}, \text{ δηλαδή } f(\sqrt{2}) = 0, \text{ τιμή που βρέθηκε στο α) ερώτημα.}$$

Έτσι, βρήκαμε τα σημεία $B(0, \sqrt{2})$ και $A(\sqrt{2}, 0)$, τα οποία είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $y = f(x) = ax + \beta$ με $x \in \mathbb{R}$, ($\alpha \cdot \beta \neq 0$) οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.



**341** ΘΕΜΑ 2

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ , με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι

$\frac{x}{2} - (1 - x) = 2x - 1 - \frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2} - 1 + x = \frac{3x}{2} - 1$, άρα $\frac{3x}{2} - 1 = \frac{3x}{2} - 1$, που ισχύει.

β) Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2} - 1 = 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 6 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

342 ΘΕΜΑ 4

α) Ας είναι Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων (I) και (II) αντίστοιχα. Τότε

$\Delta_1 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και $\Delta_2 = \beta^2 - 4\gamma\alpha$. Όστε $\Delta_1 = \Delta_2$, που σημαίνει ότι οι εξισώσεις (I) και (II) ή θα έχουν δύο διαφορετικές λύσεις ή κάθε μία αν $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$, ή και οι δύο θα είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$ αν $\Delta_1 = \Delta_2 < 0$ ή θα έχουν από μία διπλή ρίζα η κάθε μία, αν $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (I) θα ισχύει η σχέση $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$ (1).

Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \text{ που ισχύει από την (1).}$$

γ) Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (I). Τότε θα ισχύει

$$\alpha(\sqrt{2})^2 + \beta\sqrt{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \gamma + \beta\sqrt{2} = 0. \text{ Όστε } \sqrt{2} = -\frac{2\alpha + \gamma}{\beta}, \text{ αφού είναι } \beta \neq 0.$$

Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι πηλίκo ακεραίων, επομένως ρητός, άτοπο.

Ανάλογα, αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρίζα ούτε της εξίσωσης (II).

343 ΘΕΜΑ 2

α) Έχουμε:

$$x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 2.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 2$, $x = -2$.

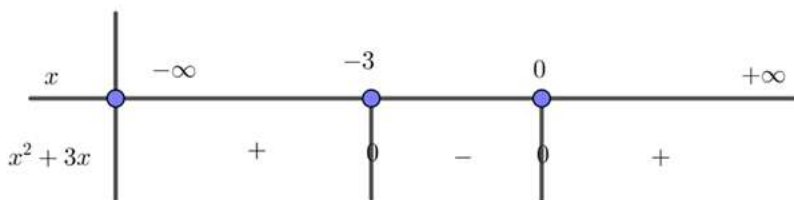
β) Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 3x$ και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του $x^2 + 3x$. Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω:

Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x \in [-3, 0]$.

γ) Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x = -2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3, 0]$.

**344** ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 1$, γιατί $x^2 + 2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g = [1, +\infty)$.

β) Για $x = 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1) = \frac{1}{1+2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x = -2$, διότι $-2 \notin A_g$.

Για $x = 2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2) = \frac{2}{2^2+2} + \sqrt{2-1} = \frac{2}{6} + \sqrt{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

345 ΘΕΜΑ 2

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ και } (y+4)^2 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x-1 = 0 \text{ και } y+4 = 0, \text{ οπότε τελικά}$$

$$x = 1 \text{ και } y = -4.$$

346 ΘΕΜΑ 4

α) Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$

και οι ρίζες:

$$\omega_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = 4 \text{ και } \omega_2 = 2.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ω	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$\omega^2 - 6\omega + 8$	+	0	-	0	+

- Αν $\omega \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία.
- Αν $\omega \in (2, 4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.
- Αν $\omega = 2$ ή $\omega = 4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία ε σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, είναι δηλαδή παράλληλη στον $x'x$.

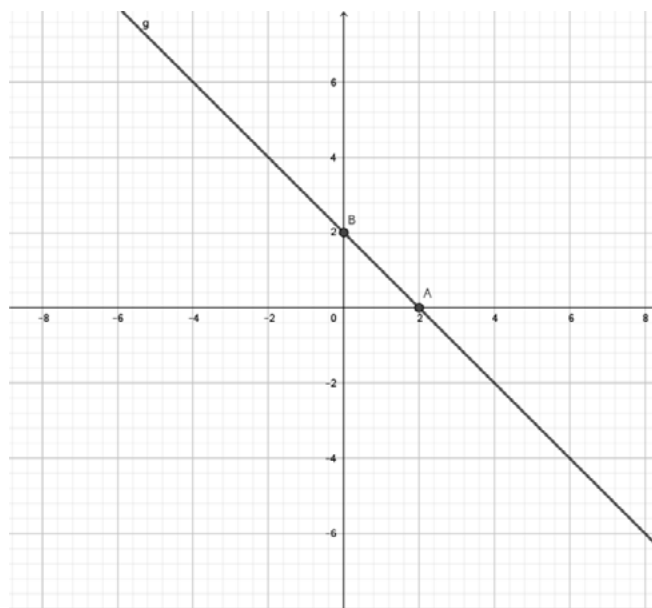
β)

- Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ πρέπει $\omega \in (2, 4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος τότε $\omega = 3$.
- Για $\omega = 3$, $\varepsilon : y = -x + 2$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0, 2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο παρακάτω Σχήμα.



Σχήμα

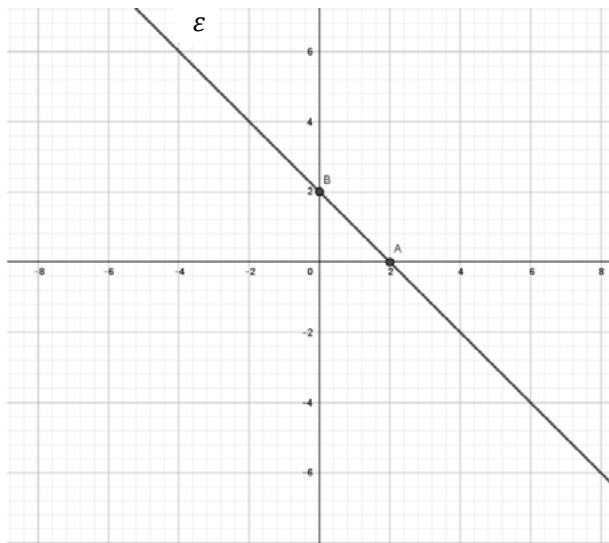
347 ΘΕΜΑ 2

α) Η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0, 2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα β), τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο παρακάτω Σχήμα.

**348** ΘΕΜΑ 4

α) Από τη γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι $f(0) = 3$ άρα $a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \gamma = 3$ οπότε $\gamma = 3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$\alpha^2 - 3 = -(5 - 3\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ και οι ρίζες της:

$$a_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}.$$

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο πρέπει:

$$\alpha^2 - 3 < 0.$$

Για $\alpha = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $\alpha = 2$ απορρίπτεται.

Για $\alpha = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $\alpha = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3.$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ η οποία για $x^2 = w > 0$ γίνεται $w^2 - 4w + 3 = 0$.



Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ και οι ρίζες

$$w = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \text{ ή } w = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1,$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές. Άρα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}, \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \{x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\}.$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x' όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$

349 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x-1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$$

β) Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1-\sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1+\sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

$$s = x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 \text{ και } p = x_1 x_2 = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2.$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ) Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 6 - (x+4) < 0 \Leftrightarrow 6 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \leq 1+\sqrt{3}$



δ) Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $(2, 1+\sqrt{3}]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \leq 1+\sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \leq 3(1+\sqrt{3})$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \leq 1 + \sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \leq 4(1 + \sqrt{3})$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha + 4\beta \leq 7(1 + \sqrt{3})$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha + 4\beta}{7} \leq 1 + \sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

350 ΘΕΜΑ 4

α) Είναι:

$$f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + 1 = 4x + 1$$

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις.

- Αν $4x + 1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq -\frac{1}{4}$, τότε

$$|4x + 1| = 4x + 1, \text{ οπότε } g(x) = 4x + 1$$

- Αν $4x + 1 < 0$, δηλαδή $x < -\frac{1}{4}$, τότε

$$|4x + 1| = -4x - 1, \text{ οπότε } g(x) = -4x - 1$$

Η γραφική παράσταση της $g(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα και προκύπτει αν σχεδιάσουμε τις ευθείες

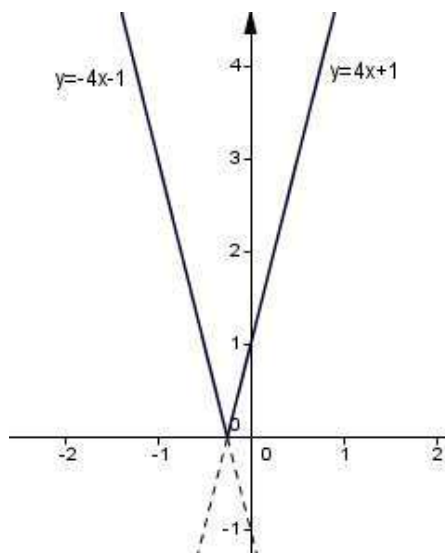
$$y = 4x + 1, y = -4x - 1$$

και επιλέξουμε την πρώτη όταν $x \geq -\frac{1}{4}$ και την

δεύτερη, όταν $x < -\frac{1}{4}$.

γ) Είναι:

$$1 < g(x) < 3 \Leftrightarrow 1 < |4x + 1| < 3 \Leftrightarrow |4x + 1| > 1 \text{ και } |4x + 1| < 3$$



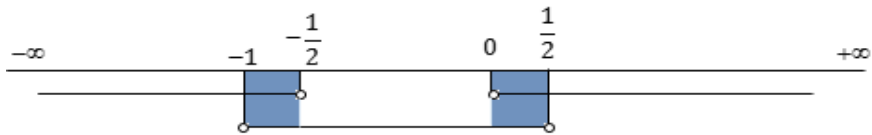


Η πρώτη ανίσωση γράφεται:

$$|4x+1| > 1 \Leftrightarrow 4x+1 < -1 \text{ ή } 4x+1 > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > 0$$

Η δεύτερη ανίσωση γράφεται:

$$|4x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 4x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < 4x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$



Η συναλήθευση των δυο ανισώσεων φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα οπότε οι κοινές λύσεις τους, που είναι οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης, είναι όλοι οι αριθμοί x με

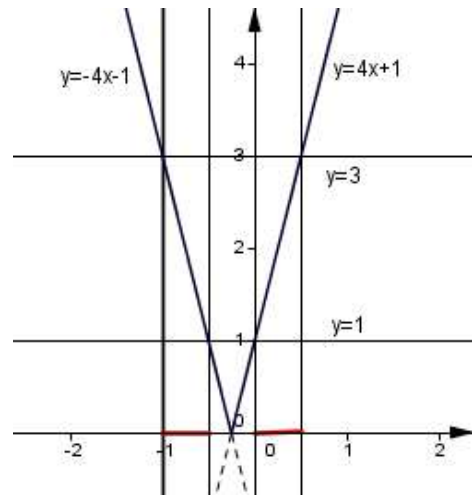
$$x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

δ) Αν ο αρνητικός αριθμός α είναι λύση της αρχικής ανίσωσης, τότε έχουμε:

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \text{ οπότε } 0 < \alpha + 1 < \frac{1}{2}$$

Έτσι, ο αριθμός $\alpha + 1$ είναι επίσης λύση της, που είναι το ζητούμενο.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται με κόκκινο χρώμα οι λύσεις της ανίσωσης $1 \leq g(x) \leq 3$.



351 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16| = \\ &= 3|x - 4| - 2|x - 4| - 3|x^2 - 16| = \\ &= |x - 4| - 3|x^2 - 16|. \end{aligned}$$

Επειδή $x \leq 4 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0$. Άρα $|x - 4| = 4 - x$.

Επιπλέον $|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 16| = 16 - x^2$.

Άρα: $f(x) = 4 - x - 3(16 - x^2) = 4 - x - 48 + 3x^2 = 3x^2 - x - 44$.

β)

- i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή $3x^2 - x - 44 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 44 = 529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4, 4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4, 0)$ και $B(-\frac{11}{3}, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = f(0) = -44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0, -44)$.

- ii. Αφού το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει: $\mu + 1 \in [-4, 4]$ και $f(\mu + 1) = -20$.

Είναι: $f(\mu + 1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu + 1)^2 - \mu - 1 - 44 = -20 \Leftrightarrow$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 45 + 20 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0.$$



Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-22) = 289$ και οι ρίζες:

$$\mu_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \begin{cases} \mu_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ \mu_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu + 1 \in [-4, 4]$.