ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Α2. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 51

Α3. Ορισμός, Σχολικό βιβλίο, σελ. 23

Α4. **α)** Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$ με $x\in\mathbb{R}$

Θέτω $x+1=u$ με $u\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x=u-1$

$f(u)=u\cdot e^{-(u-1)}$

$f(u)=u\cdot e^{1-u}$ με $u\in\mathbb{R}$

Οπότε $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ με $x\in\mathbb{R}$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}$

$f'(x)=e^{1-x}(1-x)$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ με τιμή $f(1)=1$.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}$$
$$f''(x)=e^{1-x}(-1+x-1)$$
$$f''(x)=e^{1-x}(x-2)$$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο $x_o=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A(2,f(2))$ δηλαδή $A\left(2,\frac{2}{e}\right)$

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{u\to+\infty}{\overset{u=1-x}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

B4.i) Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,1]$

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(1,+\infty)$

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^-}f(x)\right)=(0,1)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$

ii)
- Αν $\lambda\in(-\infty,0]$ τότε $\lambda\in f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$

  Άρα υπάρχει $x_o\in A_1$ ώστε $f(x_o)=\lambda$ το οποίο είναι μοναδικό στο A_1 διότι f γνησίως αύξουσα στο A_1

  Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα.
- Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $\lambda\in f(A_1)$ και $\lambda\in f(A_2)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο A_1 αφού f γνησίως αύξουσα στο A_1 και μοναδική ρίζα στο A_2 αφού f γνησίως φθίνουσα στο A_2

- Αν $\lambda=1$, τότε $\lambda\in f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$

  Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ρίζα στο A_1 που είναι μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα στο A_1.

- Αν $\lambda\in(1,+\infty)$ τότε $\lambda\notin f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$

  Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. – Στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ είναι $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$, άρα είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

– Στο διάστημα $A_2=\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x)=\text{συν}x$, άρα είναι συνεχής.

– Στο $x_o=0$:

Επειδή
$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ f(0)=1\\&\bullet\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(\alpha x^3-3x^2-x+1)=1\\&\bullet\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\text{συν}x)=1\end{aligned}\right\},$$

Δηλαδή $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, άρα η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_o=0$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

– Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}=-1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$.

Γ2. i) Η f είναι
- συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$
- παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ διότι $f(x)=\text{συν}x$ και $f'(x)=-\text{ημ}x$

  και $f(0)=1\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Άρα η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ii) Αν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, τότε $f(x) = συνx$

και $f'(x) = -ημx$

Επομένως είναι $f'(x) = 0$ με $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow ημx = 0$

$\Leftrightarrow x = \pi$, αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ μοναδική ρίζα την $x = \pi$ οπότε $\xi = \pi$

Γ3. Με $x < 0$ είναι $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$

και $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει $x < 0$ τέτοιο, ώστε $f'(x) = 0$

Η $f'(x)$ είναι τριώνυμο 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 + 12\alpha < 0$, διότι

$$\alpha < -3 \Leftrightarrow 12\alpha < -36$$
$$\Leftrightarrow 12\alpha + 36 < 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta < 0$$

Επομένως δεν έχει πραγματικές αρνητικές ρίζες και κατά συνέπεια δεν υπάρχουν σημεία $M(x, f(x))$ με $x < 0$, της C_f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Έχουμε $f'(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -ημx, & x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$

– Στο ερώτημα Γ3 αποδείξαμε ότι στο $(-\infty, 0)$ είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$ με $\Delta = 36 + 12\alpha < 0$ και επειδή $3\alpha < 0$ αφού $\alpha < -3$, είναι

$\underline{f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x < 0}$

– Αν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = συνx$ και

$f'(x) = -ημx$

και επειδή • $ημx > 0$ στο $(0, \pi)$

$\Leftrightarrow -ημx < 0$ στο $(0, \pi)$

• $ημx < 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -ημx > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Τέλος, το πρόσημο της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	○ $+$	
$f(x)$	↘	f συνεχής στο 0 ↘	↗	○

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = \pi$, το $f(\pi) = -1$ και ισχύει $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

Αποδεικνύουμε ότι έχει μία τουλάχιστον ρίζα

Η συνάρτηση K είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών στο $(0, +\infty)$ και

$$K(e) \cdot K(1) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(-1) = -\frac{(e-1)}{e} < 0$$

Άρα, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_o \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $K(x_o) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα, η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα

Επειδή $K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, είναι $K \uparrow (0, \infty)$

Επομένως, η $K(x) = 0 \Leftrightarrow (1)$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Δ2. Έχουμε $f(x) = (\ln x_o) \cdot (x+1) - \ln x - 1$, $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x_o}(x+1) - \ln x - 1, \quad \text{διότι } \ln x_o = \frac{1}{x_o}$$

$$\text{και } f'(x) = \frac{1}{x_o} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_o}{x \cdot x_o}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_o$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_o$

και το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	0		x_o		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_o)=0$	$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο που είναι και ολικό στο x_o,

$$\text{το } f(x_o)=\frac{x_o+1}{x_o}-\ln x_o-1=\frac{1}{x_o}-\ln x_o=0$$

Δ3. **<u>1ος τρόπος</u>**

Πρώτα θα δείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα η εξίσωση

$$g(x)=h(x)$$

$$\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1} \quad (E)$$

Επειδή $\frac{x_o}{e}>0$ είναι $\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}>0$ στο $\mathbb{R}$

και για να έχει ρίζα η (E) πρέπει και $xe^{-x}>0 \Leftrightarrow x>0$

Επομένως η (E) μπορεί να έχει μόνο θετικές ρίζες.

Έτσι με $x>0$ έχουμε

$$xe^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x})=\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_o-1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_o-x-1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_o-\ln x-1=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0$$

$\Leftrightarrow x=x_o$ διότι η f παίρνει την τιμή 0 μόνον για $x=x_o$, αφού παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο x_o, το $f(x_o)=0$

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν μοναδικό κοινό σημείο $M\big(x_o,\ f(x_o)=g(x_o)\big)$

<u>2ος τρόπος</u>

Θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=h(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

$$\text{Έχουμε } g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{e^x}=\frac{x_o^{x+1}}{e\cdot e^x}\Leftrightarrow x_o^{x+1}=ex\Leftrightarrow x_o^{x+1}-ex=0$$

Έστω $K(x)=x_o^{x+1}-ex\,,\ x\in\mathbb{R}$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$K'(x_o)=x_o^{x+1}\cdot \ln x_o-e$$

$$K'(x)=0\Leftrightarrow x_o^{x+1}\cdot \ln x_o=e$$

$$\Leftrightarrow x_o^{x+1}\cdot\frac{1}{x_o}=e\,,\ \text{διότι}\ \ln x_o=\frac{1}{x_o}$$

$$\Leftrightarrow x_o^{x}=e$$

$$\Leftrightarrow x\ln x_o=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln x_o}=x_o\,,\ \text{διότι}\ \ln x_o=\frac{1}{x_o}$$

$$K'(x)>0\Leftrightarrow x_o^{x+1}\cdot \ln x_o>e\Leftrightarrow \frac{x_o^{x+1}}{x_o}>e\Leftrightarrow x_o^{x}>e\Rightarrow x\ln x_o>1$$

$$\overset{\ln x_o=\frac{1}{x_o}}{\Longleftrightarrow} x>\frac{1}{\ln x_o}=x_o$$

x	$-\infty$	x_o	$+\infty$
K'	$-$		$+$
K	$\searrow$	Ελάχιστο	$\nearrow$

Η K έχει ελάχιστο στο x_o το $K(x_o)=x_o^{x_o+1}-ex_o$

$$=x_o\cdot(x_o^{x_o}-e)$$

$$=0\,,\ \text{διότι}\ \ln x_o=\frac{1}{x_o}\Leftrightarrow x_o\ln x_o=1\Leftrightarrow {x_o}^{x_o}=e$$

Άρα η K έχει μοναδική ρίζα το x_o.

Επιπλέον $g'(x)=e^{-x}(1-x)$

$$h'(x)=\left(e^{(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)}\right)'=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\ln\frac{x_o}{e}$$

$$\Leftrightarrow h'(x_o)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}(\ln x_o-1)$$

$$=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\left(\frac{1}{x_o}-1\right)$$

$$=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\left(\frac{1-x_o}{x_o}\right)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_o πρέπει και αρκεί

$$\begin{cases} f(x_o) = g(x_o) & \text{που ισχύει} \\ f'(x_o) = g'(x_o) & (2) \end{cases}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύει η (2)

Είναι $f'(x_o) = g'(x_o)$

$$\Leftrightarrow e^{-x_o}(1 - x_o) = \left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\left(\frac{1 - x_o}{x_o}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_o} = \left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1} \cdot \frac{1}{x_o} \quad \text{διότι } x_o \in (1, e)$$

$$\Leftrightarrow x_o e^{-x_o} = \left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}$$

$$\Leftrightarrow g(x_o) = h(x_o) \quad \text{αληθής αφού } g(x_o) = h(x_o)$$

Επομένως, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο μοναδικό κοινό σημείο

$$M\big(x_o, g(x_o) = h(x_o)\big)$$

Δ4. Η απόσταση των σημείων $A\big(x, f(x)\big)$ και $B\big(x, \varphi(x)\big)$ δίνεται από τη συνάρτηση

$K(x) = |f(x) - \varphi(x)|$ με $x > 0$

ή $\underline{K(x) = f(x) - \varphi(x)}$ με $x > 0$, διότι $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$

Επειδή τα κρίσιμα σημεία της φ είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $(0, +\infty)$ στα οποίο η φ' μηδενίζεται ή δεν υπάρχει.

Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (0, +\infty)$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η K με $K'(x_o) = f'(x_o) - \varphi'(x_o)$

   Επίσης, η συνάρτηση K παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_o του πεδίου ορισμού. Άρα από Θεώρημα Fermat, το

$$K'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) - \varphi'(x_o) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(x_o) = \varphi'(x_o)$$
$$\Leftrightarrow 0 = \varphi'(x_o), \quad \text{αφού } f'(x_o) = 0$$

   Άρα το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.

2) Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ. Επομένως το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.