



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα, σχολ. βιβλίο σελ.111

A2. Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ.104

A3. Θεώρημα, σχολ. βιβλίο σελ.128

A4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η παράσταση $f(x) = g(h(x))$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x \in D_h = (0, +\infty) \\ \text{και} \\ h(x) \in D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Επομένως ορίζεται η goh με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ και τύπο

$$(goh)(x) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{2\ln x}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

B2.i) Έχουμε $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$



Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2}$

$$\text{ή } f'(x) = -\frac{(x^2 + 4)}{x^2} = -1 - \frac{4}{x^2} < 0 \text{ στο } A = (0, +\infty)$$

Άρα $f \downarrow A$.

ii) Η ανισότητα $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$ γράφεται ισοδύναμα

$$\Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi(4-e^2)} > \frac{1}{e} \text{ διότι } \pi > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \text{ διότι } 4-e^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) < f(e)$$

$$\Leftrightarrow \pi > e \text{ διότι } f \downarrow A \text{ που ισχύει, άρα και η αρχική.}$$

B3. Επειδή $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4-x^2) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty$,

η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Έστω (ε) : $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,

$$\text{τότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2}{x^2} \right) = -1$$

$$\text{και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4-x^2}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{x} - x + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} \right) = 0$$

Άρα η ευθεία (ε) : $y = -x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
 $x > 0$

Άρα για $x \neq 2$ είναι $f(x) \neq 0$

και έχουμε: $|\sin(1+x^2)| \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|f(x)|} |\sin(1+x^2)| \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$



και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{x} \right) = -\infty,$

το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|} \right)$

και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigmaυν(x^2 + 1)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \cdot \left(\frac{1}{x} + \alpha \right) dx = 1$, διότι $f(x) = \frac{1}{x} + \alpha$, $x \geq 1$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{\alpha}{2} x^2 \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9\alpha}{2} - (2 + 2\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{5\alpha}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Με $\alpha = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ2.ι) Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Με $x < 1$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = -1$$

Με $x > 1$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο x_0 .



ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

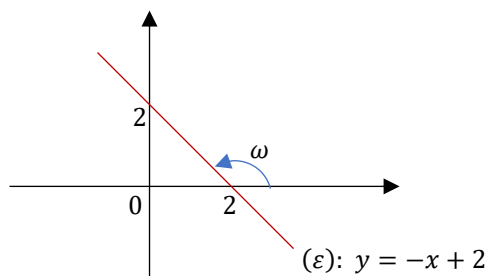
$$\Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1)$$

$$(\varepsilon): y = -x + 2$$

Έστω ω η γωνία της ευθείας (ε) με τον $x'x$.

Τότε $\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow -1 = \varepsilon\varphi\omega$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4} \text{ διότι } \omega \in [0, \pi)$$



Γ3. Επειδή $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ -1, & x = 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$

- είναι:
- $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$
 - $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$
 - $f'(1) = -1 < 0$

Άρα $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε $f \downarrow \mathbb{R}$

Επομένως, η f είναι “1-1” ως γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, η f ως συνεχής και $\downarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

διότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Γ4. 1ος τρόπος:

Το χωρίο Ω περικλείεται από $\left\{ \begin{array}{l} \text{την } C_f, \\ \text{τον } x'x, \\ \text{την } (\varepsilon): y = -x + 2 \text{ και} \\ \text{την ευθεία } x = e \end{array} \right.$

- Επειδή $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x > 1$, είναι $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $x > 1$ $\left. \vphantom{\frac{2}{x^3}} \right\}$
 f συνεχής στο $[1, +\infty)$,

άρα f κυρτή στο $[1, +\infty)$.



Επομένως $f(x) \geq y$ με $y = -x + 2$ για κάθε $x \geq 1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = 1.$$

Δηλαδή κοινό σημείο της C_f και της (ε) είναι μόνο το σημείο επαφής $M(1,1)$.

- Επίσης η (ε) : $y = -x + 2$ τέμνει τον $x'x$ στο $x_0 = 2$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2),$$

όπου Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f ,

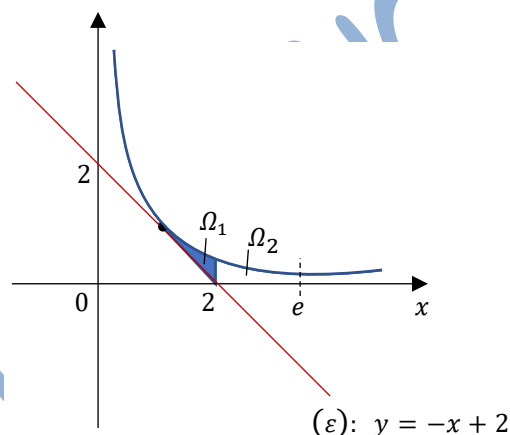
την (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$

$$\text{Δηλαδή } E(\Omega_1) = \int_1^2 (f(x) - y) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx$$

$$= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = (\ln 2 + 2 - 4) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \ln 2 - 2 + \frac{3}{2}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$



και Ω_2 το χωρίο που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και

$x = e$ με $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ στο $[2, e]$

$$\text{Δηλαδή } E(\Omega_2) = \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_2^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

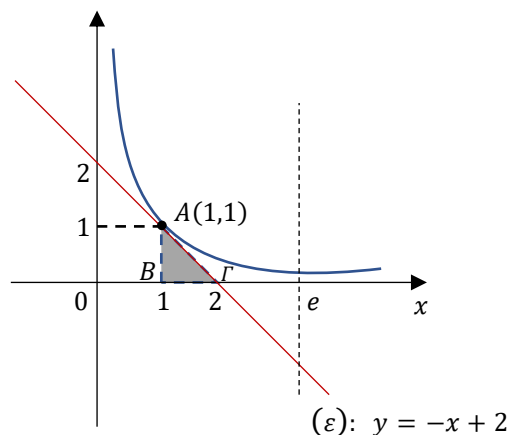
$$= \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \text{ τ. μ.}$$



2ος τρόπος:

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$, εάν αφαιρέσουμε το εμβαδόν E_2 του τριγώνου $AB\Gamma$.



$$E_1 = \int_1^e f(x) dx \text{ αφού } f \text{ συνεχής και}$$

$$f(x) \geq 0 \text{ στο } [1, e]$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e = 1$$

$$E_2 = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB) \cdot (B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } E = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $\frac{f(x) - 2x}{x - 1} = g(x)$ με $x \in (0,1) \cup (1,2)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{τότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) = (x - 1)g(x) + 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)g(x) + 2x] = 0 \cdot \ell + 2 = 2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(1) = 2$, διότι η f είναι συνεχής στο 1 ως πράξεις συνεχών στο $(0,2)$

$$\text{και } f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}, \quad x \in (0,2)$$

$$\text{ή } f'(x) = \frac{x+2}{x^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2}\right), \quad x \in (0,2)$$

και επειδή $\bullet \frac{x+2}{x^2} > 0$ στο $(0,2)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\bullet \frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$
 $x \in (0,2)$



Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα.

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Άρα η f είναι $\uparrow \Delta_1 = (0,1]$ και

$\downarrow \Delta_2 = [1,2)$

Έτσι • αν $x \in \Delta_1$ τότε η f ως $\uparrow$ και συνεχής, έχει σύνολο τιμών

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2], \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(x-2) - \frac{1}{x} + 3 \right] = -\infty \text{ και } f(1) = 2$$

• αν $x \in \Delta_2 = [1,2)$, τότε η f ως συνεχής και $\downarrow$, έχει σύνολο τιμών

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2], \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Έτσι επειδή • το $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = 0$ και η ρίζα x_1

είναι μοναδική και $x_1 \neq 1$ αφού $f \uparrow \Delta_1$ και $f(1) = 2 > f(x_1) = 0$

και • το $0 \in f(\Delta_2) \Leftrightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,2)$ ώστε $f(x_2) = 0$

αφού $f \downarrow \Delta_2$

Επίσης $f(x_1) = 0$

$$\left. f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln \frac{5}{3} > 0 \right\}$$

άρα, $f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}$ αφού $f \uparrow \Delta_1 = (0,1]$

Άρα $0 < x_1 < \frac{1}{3} < 1 < x_2 < 2$

Δ3. Γνωρίζουμε ότι η κλίση C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι η $f'(\xi)$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}-x_1} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \quad (1) \text{ αφού } f(x_1) = 0$$



Για την f στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. διότι η f παραγωγίσμη στο $(0,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Μοναδικότητα:

$$\text{Επειδή } f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0,2)$$

$$\text{και } f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ στο } (0,2)$$

άρα $f'(x) \searrow (0,2)$

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

Δ4.ι) Είναι $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = G'(x), \quad x \in (0,2) \Leftrightarrow \underline{F(x) = G(x) + c} \quad (1)$
 $G'(x) = f(x)$

Από την ισότητα $F(x) = G(x) + c$ για κάθε $x \in (0,2)$,

για: $\bullet \quad x = x_1 \Rightarrow F(x_1) = G(x_1) + c$

$\bullet \quad x = x_2 \Rightarrow F(x_2) = G(x_2) + c$

Όμως $F(x_1) = G(x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = G(x_1) + c \\ F(x_2) = 0 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G(x_1) = -c \quad (+) \\ F(x_2) = c \end{cases} \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii) Θεωρούμε την $g(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \quad x \in (0,2)$

Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών στο $(0,2)$

και: $\bullet \quad g(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1$

$$= x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$$

$$= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2, \quad \text{διότι } F(x_1) = 0$$

$$= -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2, \quad \text{διότι } G(x_1) = -F(x_2)$$

$\bullet \quad g(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + x_2 - x_1$

$$= x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$$



Όμως $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ στο (x_1, x_2)

Άρα η f ως συνεχής στο $(0,2)$ διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2) και επειδή

$f(1) = 2 > 0 \Leftrightarrow \underline{f(x) > 0}$ στο (x_1, x_2)

$\Leftrightarrow F'(x) > 0$ στο (x_1, x_2)

$\Leftrightarrow F(x) \uparrow [x_1, x_2]$, αφού F συνεχής στο $[x_1, x_2] \subset (0,2)$

και για $x_1 < x < x_2$

$\Leftrightarrow F(x_1) < F(x) < F(x_2)$

$\Leftrightarrow \underline{0 < F(x)}$, διότι $F(x_1) = 0$

$\Leftrightarrow F(x_2) > 0$

Έτσι $g(x_1) = -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2 < 0$ αφού $\begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ x_2 > 0 \\ F(x_2) > 0 \end{cases}$

$g(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Μοναδικότητα

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \in (0,2)$
και συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(0,2)$

με $g'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2$

$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2$

$= (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0$ διότι $f(x) > 0$ στο (x_1, x_2)

$x_1 > 0, x_2 > 0$

Άρα $g \uparrow [x_1, x_2]$ οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.