



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 76

A2. Όταν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ορισμός, Σχολικό βιβλίο, σελ. 155

A3. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 216

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. ▶ Γνωρίζουμε ότι:

- η g έχει πεδίο ορισμού $D_g = [1, +\infty)$
- η h έχει πεδίο ορισμού $D_h = [1, +\infty)$

Έτσι το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = A = D_g \cap D_h - \{x|h(x) = 0\}$
 $= [1, +\infty) - \{1\}$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού $A = (1, +\infty)$

και τύπο $f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}, x \in (1, +\infty)$

▶ Το πεδίο ορισμού της r είναι το σύνολο

$$D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty) = B$$

Ο τύπος της r είναι $r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = x - \frac{1}{x}$

Τέλος, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$

$r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$



B2. Επειδή $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$ στο $(1, +\infty)$, η f είναι $\downarrow$ $A = (1, +\infty)$, άρα και “1-1”.

Επομένως, αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της f^{-1} λύνουμε την εξίσωση:

$$y = f(x), \text{ ως προς } x \in A$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \quad (1)$$

- Αν $y = 1$ τότε η (1): $0 = 2$ άτοπο
- Αν $y \neq 1$ τότε η (1) $\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$ με $x > 1$ και $y \neq 1$

Επίσης η f ως $\downarrow$ $A = (1, +\infty)$ και συνεχής έχει σύνολο τιμών

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(A)$ και $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$

Επίσης $D_f = (1, +\infty) = D_{f^{-1}} = A$

$$f(x) = f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Άρα $f = f^{-1}$.

B3. Επειδή η $r(x) = x - \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$ τότε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$\text{και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Άρα η $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

B4. Η εξίσωση (E) ορίζεται στο $(1, +\infty)$ και με $x > 1$ έχουμε

$$(E) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4 \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0, \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο 2, οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\Leftrightarrow -4 + 4 + e^\lambda = -4 + 8 - 3 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ διότι γνωρίζουμε ότι } e^x \geq x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{και η ισότητα ισχύει μόνον για } x = 0$$

Άρα $\lambda = 0$.

Γ2. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$

και $f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x < 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases}$

Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $[0, 2) \cup (2, +\infty)$ και η f συνεχής στο 2.

Άρα $f \downarrow [0, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ με τιμή $f(0) = 5$, που είναι και ολικό.

x	0	2
f'	-	-
f		

f
συνεχής στο 2

Γ3. i) Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2) \cup (2, 3)$. Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Είναι: • $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-(x - 2)) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 3]$.

ii) Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{f(3) - f(0)}{3} = \frac{0 - 5}{3} = -\frac{5}{3}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2) \cup (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$



- Αν $\xi \in (0,2)$ τότε $f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$.

Άρα το $\xi \notin (0,2)$

- Αν $\xi \in (2,3)$ τότε $f'(\xi) = -2\xi + 4$ και $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} \text{ δεκτή}$$

Άρα υπάρχει $\xi = \frac{17}{6} \in (0,3)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

Γ4. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t είναι $\omega = \omega(t)$
 $y = y(t)$

$$\text{Ισχύει ότι } \varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2}$$

$$\text{και } (\varepsilon\varphi(\omega(t)))' = \frac{1}{2}y'(t)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \omega'(t) = \frac{1}{2}y'(t)$$

$$\omega'(t) = \frac{1}{2}y'(t)\sin^2(\omega(t))$$

και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{2}y'(t_0) \cdot \sin^2(\omega(t_0)) \quad (1)$$

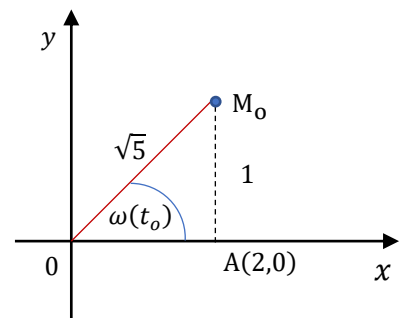
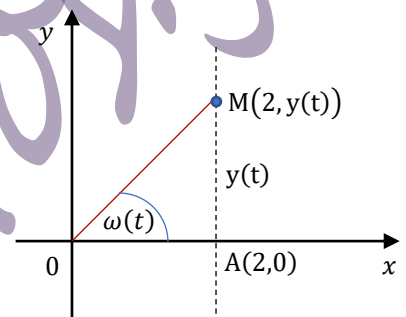
$$\text{Γνωρίζουμε ότι } y'(t_0) = \frac{1}{2}$$

$$y(t_0) = f(2) = 1$$

$$\sin \omega(t_0) = \frac{(OA)}{(OM_0)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

και από την (1) έχουμε:

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \text{ rad/s}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων

$$\text{με } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0, \quad \text{αφού } f(x) = \frac{\ln x}{x} + \alpha$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		1



$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e \quad \text{διότι η } \ln x \uparrow$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, e]$

$$\begin{aligned} \text{άρα } f(\Delta_1) &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1 + \alpha e}{e} \right], \quad \text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + \alpha \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \frac{1}{x} + \alpha \right) = -\infty \end{aligned}$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{άρα } f(\Delta_2) &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(\alpha, \frac{1 + \alpha e}{e} \right], \quad \text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{άρα} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \alpha \right) = 0 + \alpha = \alpha \end{aligned}$$

Επομένως, η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty, \frac{1 + \alpha e}{e} \right]$

$$\begin{aligned} \text{Επιπλέον, } f(A) &= \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e} \right] \quad \text{από την υπόθεση, άρα } \frac{1 + \alpha e}{e} = 1 + \frac{1}{e} \\ &\Leftrightarrow 1 + \alpha e = 1 + e \\ &\Leftrightarrow \alpha e = e \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

Δ2. Το 0 δεν ανήκει στο $f(\Delta_2) = \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right]$, άρα η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_2 .

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \bullet \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\ln 2 = \ln e - \ln 4 = \ln\left(\frac{e}{4}\right) < 0 \quad \text{διότι } e < 4 \quad \text{και } \ln \uparrow \\ \bullet \quad f(1) &= \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 > 0 \end{aligned}$$

Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα

και στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(0, e]$, και τελικά μοναδική στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Δ3. i) Είναι } f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = 1 + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{και } f(2) = 1 + \frac{\ln 2}{2} \quad \text{άρα } f(2) = f(4)$$



Η εξίσωση $f(x) = f(4)$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και

- Αν $x \in [e, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x_2 = 4$ διότι f γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, άρα και “1-1”.
 - Αν $x \in (0, e]$ έχει μοναδική ρίζα την $x_1 = 2$ διότι η εξίσωση γράφεται $f(x) = f(2)$ και η f είναι “1-1” στο $(0, e]$, ως γνησίως αύξουσα.
- Άρα η $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

ii) Για $x > 0$ είναι $2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2$, διότι $2^x, x^2$ θετικοί και $\ln \uparrow$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{\ln x}{x} \geq 1 + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 1 + \frac{\ln 2}{2} \quad (1)$$

- Αν $x \in (0, e]$ τότε η $(1) \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2$ διότι $f \uparrow (0, e]$, άρα κάθε $x \in [2, e]$ είναι λύση της (1) .
- Αν $x \in [e, +\infty)$ τότε η $(1) \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow x \leq 4$ διότι $f \downarrow [e, +\infty)$, άρα κάθε $x \in [e, 4]$ είναι λύση της (1) .

Τελικά, λύσεις της (1) είναι τα $x \in [2, 4]$.

Δ4. $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} = \left(\frac{\ln e^x}{e^x} + 1 \right) \cdot \frac{1-x}{e^x} = \left(\frac{x}{e^x} + 1 \right) \cdot \frac{1-x}{e^x} = \frac{(x+e^x)(1-x)}{e^{2x}}, x \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι $\Omega: \begin{cases} C_g \\ x'x \\ x = -\ln 2 \\ x = 0 \end{cases}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx$$

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x + e^x = 0$ διότι $\frac{1-x}{e^{2x}} > 0$ για κάθε $x \in [-\ln 2, 0]$

Η $K(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $K'(x) = 1 + e^x > 0$.

Άρα $K \uparrow \mathbb{R}$

Η K συνεχής στο $[-\ln 2, 0]$

$$K(-\ln 2) = -\ln 2 + \frac{1}{2} = \ln \sqrt{e} - \ln 2 = \ln \frac{\sqrt{e}}{2} < 0 \text{ διότι } \sqrt{e} < 2$$

$$K(0) = 1$$



Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-\ln 2, 0)$ τέτοιο ώστε $K(x_1) = 0$ το οποίο

είναι μοναδικό διότι $K \uparrow (-\ln 2, 0)$

$$-\ln 2 \leq x \leq x_1 \xrightarrow{K \uparrow} K(-\ln 2) \leq K(x) \leq K(x_1) = 0 \Rightarrow K(x) \leq 0$$

$$x_1 < x \leq 0 \xrightarrow{K \uparrow} K(x_1) < K(x) \Leftrightarrow 0 < K(x)$$

- $1 - x > 0$ διότι $x \leq 0$ και $e^{2x} > 0$

Άρα $g(x) \leq 0$ στο $[-\ln 2, x_1]$

$g(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

$$\text{Τότε } E(\Omega) = - \int_{-\ln 2}^{x_1} g(x) dx + \int_{x_1}^0 g(x) dx$$

Θέτω • $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$

$$\bullet \quad du = (e^x)' dx \Leftrightarrow du = e^x dx \Leftrightarrow du = u dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u}$$

Για $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

$$x = -\ln 2 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$x = x_1 \Leftrightarrow u = e^{x_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } I_1 &= \int_{x_1}^0 g(x) dx = \int_{x_1}^0 f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} dx = \int_{e^{x_1}}^1 f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{du}{u} \\ &= \int_{e^{x_1}}^1 f(u) \cdot \left(\frac{\ln u}{u} + 1 \right)' du = \int_{e^{x_1}}^1 f(u) \cdot f'(u) du = \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{e^{x_1}}^1 \\ &= \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(e^{x_1})}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (-1 + 1) = \frac{1}{2}, \text{ διότι } e^{x_1} + x_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\ln 2}^{x_1} f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{e^{x_1}} f(u) \cdot \left(\frac{1-\ln u}{u^2} \right) du = \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{e^{x_1}} = \frac{f^2(e^{x_1})}{2} - \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2 = -\frac{1}{2} (-2\ln 2 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = -I_1 + I_2 = \frac{1}{2} (1 - 2\ln 2)^2 + \frac{1}{2}$$