



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 186

Α2. Θεώρημα, Σχολικό βιβλίο, σελ. 76

Α3. Ορισμός, Σχολικό βιβλίο, σελ. 169

Α4. α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$ και γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και το x_0 εσωτερικό του $\mathbb{R}$ τότε, από θεώρημα Fermat:

$$f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = -12$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -6$$

Τότε $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

Β2. Έχουμε ότι με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$$





$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα.

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1], \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Το $0 \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και άρα “1-1” και $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) = 1 \neq 0$.

$$\text{Επίσης } x_1 > 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(0) \Leftrightarrow 0 > -3 \text{ Ισχύει}$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1, 3]$ οπότε $f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

Το $0 \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 και άρα “1-1”, και $x_2 \neq 3$ και $x_2 \neq 1$ διότι $f(3) = -3 \neq 0$ και $f(1) = 1 \neq 0$.

$$\text{Η } f \text{ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_3 = [3, +\infty) \text{ οπότε } f(\Delta_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty),$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Το $0 \in f(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο Δ_3 και άρα “1-1”, και $x_3 \neq 3$ διότι $f(3) = -3 \neq 0$.

Άρα η f έχει 3 θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$ οπότε έχει σημείο καμψής το $A(2, f(2)) \equiv A(2, -1)$

B4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

Η εφαπτομένη της C_f στο ξ είναι:

$$(\epsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο ξ είναι:

$$\begin{aligned} (\epsilon_2): y - g(\xi) &= g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) - \xi = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) \\ &\Leftrightarrow y = (f'(\xi) + 1)x + f(\xi) + \xi - \xi f'(\xi) - \xi \\ &\Leftrightarrow y = (f'(\xi) + 1)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{Για } x = 0: \quad \epsilon_1: y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

$$\epsilon_2: y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Οπότε το σημείο $M(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$ είναι το κοινό σημείο των ϵ_1, ϵ_2 και ανήκει στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.



Στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0, \text{ διότι για } x < 0 \text{ είναι } -1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$\stackrel{e^x > 0}{\iff} -e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Οπότε, από Κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1 = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η (ϵ) : $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γ3. Έχουμε την εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \iff f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως διαφορά συνεχών

$$h(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$h(0) = f(0) - \frac{1}{2} = \sqrt{0^2 + 0} - \frac{1}{2} < 0$$

Άρα $h(0) \cdot h(-\pi) < 0$, οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi) = 0 \iff f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$$





Γ4. Για $x \geq 0$ έχουμε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Ισχύει ότι:

$$\text{Με } C_f \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + x}$$

$$\text{Όμως } y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

Για $x(t) > 0$:

$$y'(t) = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Για $t = t_0$:

$$y'(t_0) = \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1, \text{ διότι } x'(t_0) > 0 \text{ και } x'(t_0) = y'(t_0)$$

$$\stackrel{2x(t_0)+1>0}{\Leftrightarrow} 4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0 \text{ Αδύνατον}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε $x'(t_0) = y'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$ για κάθε $x > 0$.

Η $g(x) = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2}$$

$$= \frac{e^{\ln^2 x} \left(f(x) - F(x) 2\ln x \frac{1}{x} \right)}{(e^{\ln^2 x})^2} \text{ διότι } F \text{ παράγουσα της } f, \text{ άρα } F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x > 0$

$$= \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{xe^{\ln^2 x}}$$

$$= 0 \text{ διότι } xf(x) = 2F(x)\ln x \text{ για κάθε } x > 0$$

Επειδή g συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $g'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$, η g είναι σταθερή.

Δ2. (i) Α' τρόπος

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$, άρα $f'(1) = 2$, οπότε ισχύει



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2$$

διότι για $x = 1$ η αρχική ισότητα δίνει $f(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Επιπλέον } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Β' τρόπος

$$\text{Για κάθε } x > 0 : \quad xf(x) = 2F(x)\ln x \Rightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + \frac{2F(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2f(x)\ln x}{x} + \frac{2F(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$$

η f' συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $(0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

(ii) Η F είναι συνεχής στο 1, ως παραγωγίσιμη, άρα:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x \Leftrightarrow F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x} \quad \text{για κάθε } x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

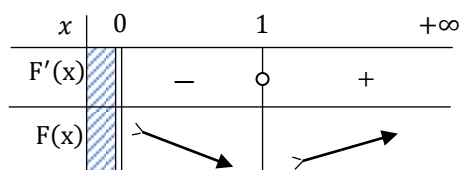
$$\text{Οπότε } F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1$$

$$\text{Από το } \Delta 1 \text{ υπάρχει } c \in \mathbb{R}, \text{ ώστε } g(x) = c \text{ για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}} = c \text{ και}$$

$$\text{για } x = 1 \text{ προκύπτει } c = \frac{F(1)}{1} \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα } g(x) = 1 \Leftrightarrow F(x) = e^{\ln^2 x} \quad \text{ή} \quad F(x) = x^{\ln x} \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

$$\Delta 3. \quad \text{Η } F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } F'(x) = \frac{e^{\ln^2 x} \cdot 2\ln x}{x}, \quad x > 0$$



$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

F συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα $F \downarrow (0, 1]$, $F \uparrow [1, +\infty)$ και έχει ελάχιστο το $F(1) = 1$
Επομένως $F(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα μόνον για $x = 1$

Α' Τρόπος

Παρατηρούμε ότι $F(x^2) = e^{(\ln x^2)^2} = e^{(2 \ln x)^2} = e^{4 \ln^2 x} = (e^{\ln^2 x})^4 = F^4(x)$ και η εξίσωση γράφεται:

$$F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2 \Leftrightarrow F^4(x) - F(x) = -(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow F(x)(F^3(x) - 1) = -(x - 1)^2$$

Επιπλέον $F(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα μόνο για $x = 1$

Άρα $F^3(x) \geq 1 \Leftrightarrow F^3(x) - 1 \geq 0$ και $F(x)(F^3(x) - 1) \geq 0$ ενώ $-(x - 1)^2 \leq 0$

Επομένως $-(x - 1)^2 \leq 0 \leq F(x)(F^3(x) - 1)$, άρα η εξίσωση

$$F(x^2) - F(x) = -(x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)(F^3(x) - 1) = 0 \\ -(x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)(F^3(x) - 1) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,$$

διότι επαληθεύεται και η πρώτη εξίσωση για $x = 1$

Β' Τρόπος

$$F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x - 1)^2 \quad (\text{E})$$

- Για κάθε $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$ άρα: F συνεχής στο $[x, x^2]$

F παραγωγίσιμη στο (x, x^2)

Από θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x, x^2)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \quad (1)$$

$$(\text{E}) \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 - x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} F'(\xi_1) = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 - x} \text{ αδύνατη, διότι } F'(\xi_1) > 0$$

$$\text{και } -\frac{(x - 1)^2}{x^2 - x} < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Από θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (x^2, x)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \quad (2)$$

$$(\text{E}) \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 - x} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} F'(\xi_2) = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 - x} \text{ αδύνατη, διότι } F'(\xi_2) < 0$$



$$\text{και } -\frac{(x-1)^2}{x^2-x} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα η (E) δεν έχει λύσει στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

$$(E) \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} F(1) - F(1) = -(1-1)^2 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ άρα το } 1 \text{ είναι μοναδική λύση}$$

Γ' Τρόπος

Προφανής ρίζα της εξίσωσης (E): $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ είναι το 1.

- Αν $x > 1$ τότε $x^2 > x > 1$ και $F \uparrow [1, +\infty)$ άρα $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$, ενώ το $-(x-1)^2 < 0$, άρα η (E) είναι αδύνατη.
- Αν $0 < x < 1$ τότε $x^2 < x < 1$ και $F \downarrow (0,1]$ άρα $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$, ενώ το $-(x-1)^2 < 0$, άρα η (E) είναι αδύνατη.

Τελικά η (E) έχει μόνο μία ρίζα, τη $x = 1$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^e |F(x)| dx$

Επειδή $F(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$, από ερώτημα **Δ3**, είναι $E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$

Γνωρίζουμε ότι $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ για κάθε $x > 0$, διότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισότητα μόνον για $x = 0$

Επομένως η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[1, e]$, άρα

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \right)$$

$$= e - 2(e - e + 1) = e - 2$$

$$\text{Άρα } \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = e - 2 + e - 1 = 2e - 3$$

Τελικά, από (1) προκύπτει ότι $E > 2e - 3$

