



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα. Σχολικό βιβλίο σελ.133

Α2. Θεώρημα. Σχολικό βιβλίο σελ.51

Α3. Ορισμός. Σχολικό βιβλίο σελ.185

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2\ln(x-1)$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

Β1. Για να ορίζεται η $h = fog$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$D_h = D_{fog} = (2, +\infty)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (fog)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) \\ &= \ln(x-2), \quad x > 2 \end{aligned}$$

Β2. Είναι $h(x) = \ln(x-2)$ και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Άρα $h \uparrow (2, +\infty)$ οπότε και "1-1", άρα αντιστρέφεται.



$$D_h^{-1} = h(D_h) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \text{ διότι αν } u = x-2, \text{ τότε } u \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty, \text{ διότι αν } u = x-2, \text{ τότε } u \rightarrow +\infty$$

$$\text{Λύνουμε ως προς το } x \text{ την } h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y$$

$$\Leftrightarrow x-2 = e^y$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 2,$$

$$\text{άρα } h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{B3. Ισχύει } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) \stackrel{(-\infty) \cdot 2}{=} -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.i. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases} \text{ άτοπο}$$

$$\text{Άρα } \kappa = 0.$$

$$\text{Τότε } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii. Η } f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως ρητή με } f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - 2x^2\mu}{(x^2+1)^2}$$

Επίσης, η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$.

$$\text{Άρα } f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Γ2.i. Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως ρητή με } f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$





x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					



τοπικό
ελάχιστο



τοπικό
μέγιστο



Η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$

- γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$

- γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$

Η f έχει

- τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

- τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii. Στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$$f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Στο $\Delta_2 = (-1, 1)$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Άρα } f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

▷ Αν $\alpha = 0$, τότε $f(x) = \frac{1}{2}$

Το $\frac{1}{2} \in f(\Delta_3)$ και $\frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$, $\frac{1}{2} \notin f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \Delta_3$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \text{ το}$$

οποίο είναι μοναδικό διότι $f \downarrow \Delta_3$.

▷ Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$ οπότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$ και άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.



$$\begin{aligned} \Gamma 3. \text{i. } I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

ii. Από $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$ για $v = 0$ έχουμε:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

Από την $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$, $v \in \mathbb{N}$:

▷ για $v = 0$ έχουμε:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

▷ για $v = 1$ έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2\ln 2}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Η Φ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- $\Phi(-1) = g(-1) - 1 < 0$

διότι $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow -1 < g(-1) - 1 < 0$

- $\Phi(0) = g(0) > 0$ αφού $g(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$

Επομένως, από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε

$$\Phi(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Μοναδικότητα

α' τρόπος:

Έστω ότι η εξίσωση $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x + g(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 1$ στο διάστημα $(-1, 0)$. Υποθέτουμε $\rho < x_1$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)



Τότε στο διάστημα $[\rho, x_1]$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle

- $\Phi'(\rho) = \Phi(x_1) - \rho$





- Φ συνεχής στο $[\rho, x_1]$
- παραγωγίσιμη στο (ρ, x_1)

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\rho, x_1) \subseteq (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $\Phi'(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow g'(x_0) + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow g'(x_0) = -1$ άτοπο, λόγω της υπόθεσης

$g'(x) \neq -1$ στο $\mathbb{R}$

Άρα η ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$ είναι μοναδική.

β' τρόπος:

Επειδή $\Phi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ και η Φ' συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, άρα $\Phi'(x) > 0$ ή $\Phi'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή η Φ είναι γνησίως μονότονη, οπότε η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

Δ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$

Επομένως ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \quad (1)$$

Όμως

- με $x < 0$ έχουμε $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = x(g(x) + x)$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [x(g(x) + x)] = 0 \cdot g(0) + 0 = 0$ διότι g συνεχής στο 0

- με $x > 0$ είναι $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\epsilon\phi x}{x} - \kappa$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\epsilon\phi x}{x} - \kappa \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right]$

$$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{1} - \kappa = 3 - \kappa$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] = 3 - \kappa \quad (3)$$

Τέλος η (1), λόγω των (2) και (3) γράφεται

$$(1) \Leftrightarrow 0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$$





Δ3. i) Η f είναι

- συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
 - παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- ως παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{με } f'(x) = 2\sin x + \frac{1}{\sin^2 x} - 3 = \frac{2\sin^3 x - 3\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $2\sin^3 x - 3\sin^2 x + 1 = 2\omega^3 - 3\omega^2 + 1$ με $\omega = \sin x$

Προφανής ρίζα $\omega = 1$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & -1 & -1 & \\ & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } 2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 &= (\omega - 1)(2\omega^2 - \omega - 1) = (\omega - 1)2(\omega - 1)\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ &= (\omega - 1)^2(2\omega + 1) = (\sin x - 1)^2(2\sin x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \frac{(\sin x - 1)^2(2\sin x + 1)}{\sin^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{και επειδή } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < 1$$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } f'(x) > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Bigg\} \\ f \text{ συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Bigg\}, \text{ άρα } f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{και για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

ii. Είναι $3f(x) = \pi$

$$f(x) = \frac{\pi}{3}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Από το ερώτημα Δ3. i) έχουμε ότι } f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) = \Delta_1$$

Έτσι η f ως συνεχής στο Δ_1 έχει σύνολο τιμών

$$f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)\right) = [0, +\infty) \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \epsilon\varphi x = +\infty$$

$$\text{Άρα, ο αριθμός } \frac{\pi}{3} \in f(\Delta_1) \Leftrightarrow \text{υπάρχει ένα } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_0) = \pi$$

$$\text{και το } x_0 \text{ είναι μοναδικό γιατί } f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$



**Δ4.ι. α' τρόπος**

Έστω $\Phi(x) = g(x) + x$, $x \in [x_1, 0]$ τότε $\Phi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και επειδή η Φ' είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, 0]$. Δηλαδή $\Phi'(x) > 0$ ή $\Phi'(x) < 0$.

Άρα η Φ είναι γνησίως μονότονη στο $[x_1, 0]$.

Αν ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για $x_1 < 0 \Rightarrow \Phi(x_1) > \Phi(0) \Rightarrow 0 > g(0)$ Άτοπο

Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x_1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \Phi(x_1) \leq \Phi(x) \Rightarrow 0 \leq \Phi(x)$

Άρα και $x^2\Phi(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$, δηλαδή $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

β' τρόπος

Η συνάρτηση $\Phi(x) = g(x) + x$ είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$ και $\Phi(x) \neq 0$ σε αυτό (λόγω του Δ1)

Άρα η Φ διατηρεί πρόσημο στο $(x_1, 0]$ και $\Phi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$, άρα $\Phi(x) > 0$ στο $(x_1, 0]$, οπότε και $x^2\Phi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

Επομένως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$

- ii. Είναι: $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ διότι x_2 είναι η λύση της $3f(x) = \pi$ και η f συνεχής στο $[x_1, \frac{\pi}{3}]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \quad (1)$$

Από τα ερωτήματα Δ3(i), Δ4(i) η $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, \frac{\pi}{3}]$, άρα $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

Το χωρίο Ω χωρίζεται από τον άξονα $y'y$ (ευθεία $x = 0$) σε δύο ισεμβαδικά, άρα:

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x - 3x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx \\ &= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -1 - \frac{\pi^2}{6} + 2 - \ln \frac{1}{2} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα από (2)} \Rightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Για το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx$$





$$\begin{aligned}
 &= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3(f(x) - x^3) dx \quad \text{διότι } g(x_1) = -x_1 \text{ και } x^2 g(x) = f(x) - x^3 \\
 &= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 \\
 &= x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - 3 \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3
 \end{aligned}$$

www.irakleitos.gr